7 - الحساب التكاملي

معارف

I - تكامل دالة مستمرة

1. تعريف

f دالة معرفة و مستمرة على مجال I. a و b عددان من I.

F دالة أصلية للدالة f على المجال I.

العدد $F(b) - F(a)$ يسمى التكامل من a إلى b للدالة f.

يرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x)\,dx$ و يقرأ التكامل من a إلى b لـ $f(x)$ تفاضل x.

و نكتب $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

ملاحظة : العدد $\int_a^b f(x)\,dx$ يتعلق بالدالة f، a و b فهو مستقل عن المتغير x.

أي أن $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz$.

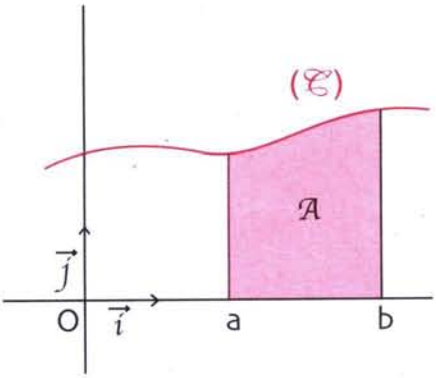
2. التفسير الهندسي

المستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في هذا المعلم.

• الدالة f موجبة على المجال $[a ; b]$

العدد الحقيقي الموجب $\int_a^b f(x)\,dx$ هو مساحة الحيز $\mathcal{A}$ للمستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C})$ و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = a$ و $x = b$.

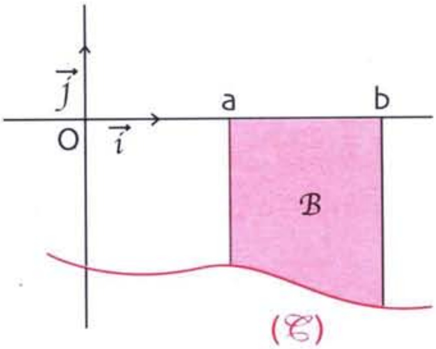
نكتب : $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.



• الدالة f سالبة على المجال $[a ; b]$

العدد الحقيقي $\int_a^b f(x)\,dx$ سالب و العدد الحقيقي الموجب $-\int_a^b f(x)\,dx$ هو مساحة الحيز $\mathcal{B}$ للمستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C})$، محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = a$ و $x = b$.

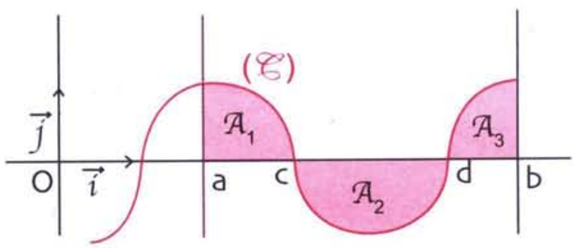
نكتب : $\mathcal{B} = -\int_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b)$.



• إشارة الدالة f تتغير على المجال $[a ; b]$

الدالة f معرفة و مستمرة على المجال $[a ; b]$.

العدد الحقيقي $\int_a^b |f(x)|\,dx$ هو مساحة الحيز $\mathcal{A}$ للمستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C})$ و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = a$ و $x = b$



في الشكل يظهر أن : $\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)|\, dx = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$

$= \int_a^c f(x)\, dx - \int_c^d f(x)\, dx + \int_d^b f(x)\, dx$

II - الخواص

خاصية الخطية للتكامل

f و g دالتان معرفتان و مستمرتان على مجال I. a و b عددان من المجال I. من أجل كل عددين حقيقيين α و β ؛ $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$

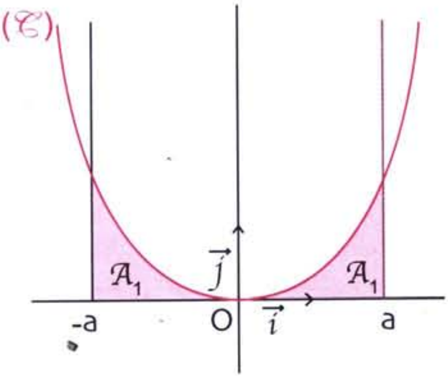
شفعية الدالة

f دالة معرفة و مستمرة على مجال I.

إذا كانت f زوجية على I.

فإن من أجل كل عدد a من I ؛

$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2 \int_0^a f(x)\, dx$.



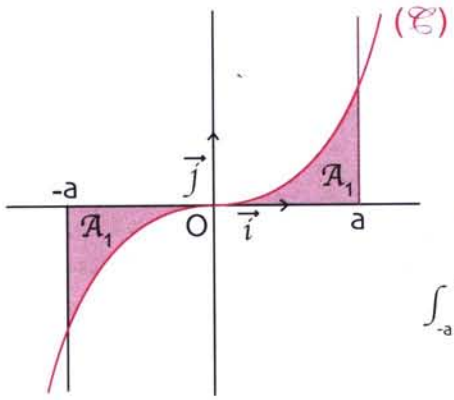
في الشكل المقابل، الدالة f موجبة

إذن $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\,\mathcal{A}_1$

(و إذا كانت f سالبة فإن $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = -2\,\mathcal{A}_1$)

• إذا كانت f فردية على I

فإن من أجل كل عدد a من I ؛ $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$



في الشكل المقابل، الدالة f موجبة على $[0 ; a]$

و سالبة على $[-a ; 0]$. إذن $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = -\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_1 = 0$

علاقة شال

f دالة معرفة و مستمرة على مجال I.

• من أجل كل عدد a من I ؛ $\int_a^a f(x)\, dx = 0$

• من أجل كل أعداد a، b و c من I ؛ $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$ (علاقة شال)

نتيجة : من أجل كل عددين a و b من I ؛ $\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$

(أو أيضا : $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$)

مبرهنة (إيجابية التكامل)

f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a ; b]$.

• إذا كان من أجل كل عدد x من $[a ; b]$، $f(x) \geq 0$ فإن $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

مبرهنة

f و g دالتان معرفتان و مستمرتان على المجال $[a ; b]$.

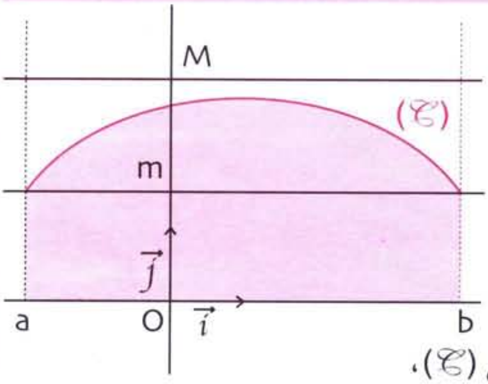
• إذا كان من أجل كل عدد x من $[a ; b]$، $f(x) \leq g(x)$ فإن $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

مبرهنة (متباينة المتوسط)

f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a ; b]$.

• إذا كان m و M عددين حقيقيين حيث من أجل كل عدد x من $[a ; b]$، $m \leq f(x) \leq M$

فإن $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.



التفسير الهندسي

بفرض أن f موجبة على $[a ; b]$.

• يكون $m(b-a)$ هي مساحة المستطيل الذي بعداه $b-a$ و m.

$M(b-a)$ هي مساحة المستطيل الذي بعداه $b-a$ و M.

$\int_a^b f(x)\,dx$ هي مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C})$، محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = a$ و $x = b$.

القيمة المتوسطة لدالة

f دالة معرفة و مستمرة و موجبة على مجال $[a ; b]$.

تعريف

القيمة المتوسطة للدالة f على مجال $[a ; b]$ هي العدد الحقيقي $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

مبرهنة (حصر القيمة المتوسطة)

إذا كان m و M عددين حقيقيين حيث من أجل كل عدد x من $[a ; b]$، $m \leq f(x) \leq M$

فإن $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$.

III - التكاملات و الدوال الأصلية

مبرهنة

إذا كانت f مستمرة على مجال I و $a \in I$ فإن الدالة F المعرفة على I كما يلي :

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f التي تنعدم عند a.

معـــارف

المكاملة بالتجزئة

إذا كانت u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I حيث الدالتان u' و v' مستمرتان على I.

فإن $\int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt = [u(t)\,v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt$.

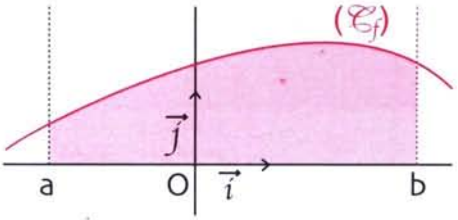
هذه الطريقة لحساب $\int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$ تسمى المكاملة بالتجزئة.

حساب مساحات محدودة بمنحن

f دالة مستمرة على مجال I ؛ a و b عددان من I حيث $a < b$.

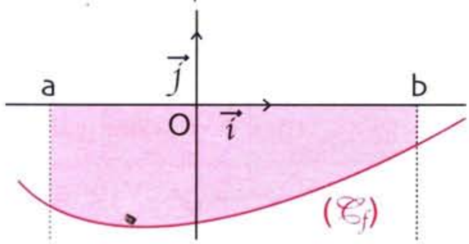
$(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

$\mathcal{A}$ مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحني $(\mathscr{C}_f)$ و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = a$ و $x = b$.

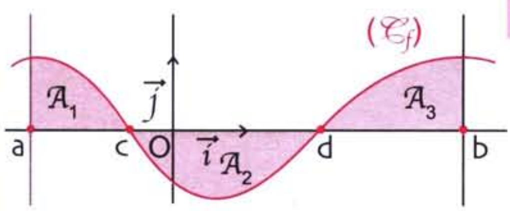


مبرهنة

- إذا كان من أجل كل عدد x من المجال $[a ; b]$ ، $f(x) \geq 0$ فإن $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx$ (وحدة المساحات)



- إذا كان من أجل كل عدد x من المجال $[a ; b]$، $f(x) \leq 0$ فإن $\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)\,dx$ (وحدة المساحات)
- إذا كانت إشارة f تتغير على $[a ; b]$، فإن $\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)|\,dx$ (وحدة المساحات)



ملاحظة : في الشكل المقابل،

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$$

$$\mathcal{A} = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$$

حساب مساحة محدودة بمنحنيين

f و g دالتان مستمرتان على المجال I ؛ a و b عددان من I حيث $a < b$

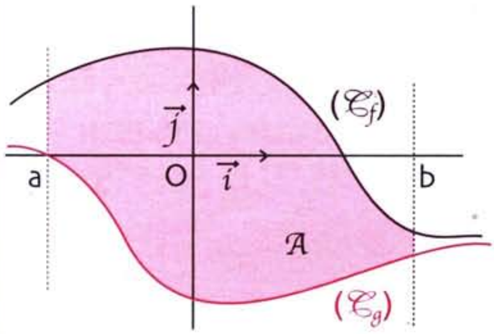
$(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ المنحنيان المثلان للدالتين f و g على الترتيب في معلم متعامد $(o ; \vec{i}, \vec{j})$ للمستوي.

مبرهنة

$\mathcal{A}$ هي المساحة المحدودة بالمنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = a$ و $x = b$.

إذا كان من أجل كل عدد x من I ؛ $f(x) \leq g(x)$

فإن $\mathcal{A} = \int_a^b \left[g(x) - f(x)\right] dx$ (وحدة المساحات)



ملاحظة : • إذا كان $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$ و $\|\vec{j}\| = 1\text{cm}$

فإن وحدة المساحات هي 1cm^2.

• إذا كان $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$ و $\|\vec{j}\| = 3\text{cm}$ فإن وحدة المساحات هي 6cm^3.

فإن $\mathcal{A} = 5\times 6\text{cm}^2 = 30\text{cm}^2$

حساب حجوم

$(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم متعامد من الفضاء.$(\mathscr{E})$ جزء من الفضاء محدود بالمستويين ذوي المعادلتين $z = a$ ؛ $z = b$ و $\mathcal{V}$ حجمه.

مبرهنة

t ينتمي إلى المجال $[a ; b]$. ليكن $S(t)$ مساحة السطح الناتج عن تقاطع الجزء $(\mathscr{E})$ مع المستوي ذي المعادلة $z = t$ أي المستوي العمودي على (oz) في $P(0 ; 0 ; t)$ و الموازي للمستوي (oxy).

• إذا كانت الدالة S مستمرة على $[a ; b]$ فإن $\mathcal{V} = \int_a^b S(t)\,dt$. (وحدة الحجوم)

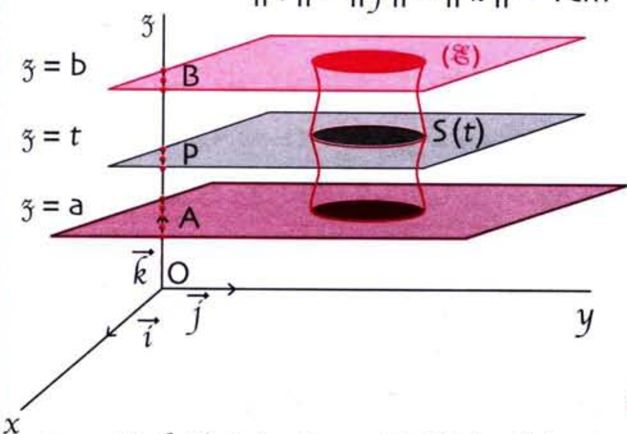
ملاحظة : • إذا كان المعلم متعامدا و متجانسا $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1\text{cm}$

فإن وحدة الحجوم هي 1cm^3.

• إذا كان المعلم متعامدا حيث $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$

و $\|\vec{j}\| = 1\text{cm}$ و $\|\vec{k}\| = 3\text{cm}$

فإن وحدة الحجوم هي 6cm^3.

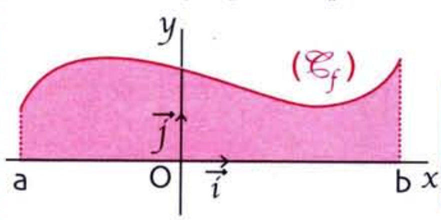


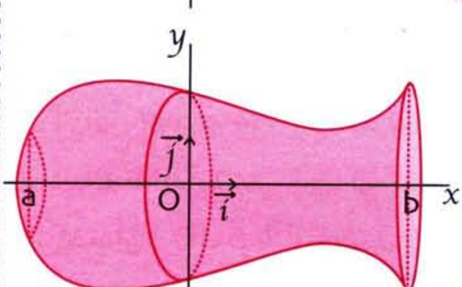
حجم مجسم دوراني محوره هو محور الفواصل

$(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم متعامد و متجانس من الفضاء. ليكن $(\mathscr{C}_f)$ المنحني الممثل لدالة f المستمرة على مجال $[a ; b]$ حيث $a < b$ في المستوي ذي المعادلة $z = 0$ (أي المستوي (oxy)).

مبرهنة

عندما يدور المنحنى حول المحور $(o ; \vec{i})$ فإنه يولد مجسما دورانيا حجمه $v = \int_a^b \pi\left[f(t)\right]^2 dt$ حيث $t \in [a;b]$.





ملاحظة : بتطبيق المبرهنة السابقة و بملاحظة أن مساحة الحيز المستوي المحصل عليها بتقاطع الجزء $(\mathscr{E})$ مع المستوي ذي المعادلة ، $x = t$، $t \in [a ; b]$ هي مساحة القرص الذي نصف قطره $\left|f(x)\right|^2$. إذن $S(t) = \pi\left[f(t)\right]^2$

و بالتالي $\mathcal{V} = \int_a^b \pi\left[f(t)\right]^2 dt$.

1 حساب تكامل دالة مستمرة

تمرين

احسب التكاملات التالية :

$\int_{-1}^{4} 3\, dx$ ؛ $\int_{-2}^{2} (4x+5)\, dx$ ؛ $\int_{0}^{1} (x^2 - x + 1)\, dx$

$\int_{0}^{\pi} \cos x\, dx$ ؛ $\int_{0}^{\pi} \sin x\, dx$ ؛ $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\sin x - 3\sin x)\, dx$

حل

• حساب التكامل $\int_{-1}^{4} 3\, dx$

الدالة $f : x \longmapsto 3$ ثابتة إذن f معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$.

و بالتالي فهي مستمرة على المجال $[-1 ; 4]$.

الدالة F المعرفة على $[-1 ; 4]$ كما يلي : $F(x) = 3x$ هي دالة أصلية للدالة f على $[-1 ; 4]$.

ينتج أن $\int_{-1}^{4} 3\, dx = F(4) - F(-1) = 3\times4 - 3\,(-1) = 12 + 3 = 15$

إذن $\int_{-1}^{4} 3\, dx = 15$

• حساب التكامل $\int_{-2}^{2} (4x+5)\, dx$

الدالة $f : x \longmapsto 4x + 5$ معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$. فهي مستمرة على المجال $[-2 ; 2]$.

الدالة F المعرفة على $[-2 ; 2]$ كما يلي : $F(x) = 2x^2 + 5x$ هي دالة أصلية للدالة f على $[-2 ; 2]$

ينتج أن $\int_{-2}^{2} (4x+5)\, dx = F(2) - F(-2) = (2(2)^2 + 5\times2) - (2(-2)^2 + 5(-2))$

$= (8 + 10) - (8 - 10) = 20$

و بالتالي $\int_{-2}^{2} (4x+5)\, dx = 20$

• حساب التكامل $\int_{0}^{1} (x^2 - x + 1)\, dx$

الدالة $f : x \longmapsto x^2 - x + 1$ معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$. فهي مستمرة على المجال $[0 ; 1]$.

الدالة F المعرفة على $[0 ; 1]$ كما يلي : $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x$ هي دالة أصلية للدالة f على $[0 ; 1]$

ينتج أن $\int_{0}^{1} (x^2 - x + 1)\, dx = F(1) - F(0) = \left[\frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{2}(1)^2 + 1\right] - \left[\frac{1}{3}\times0 - \frac{1}{2}\times0 + 0\right]$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{6}$

و بالتالي $\int_{0}^{1} (x^2 - x + 1)\, dx = \frac{5}{6}$

• حساب التكامل $\int_{0}^{\pi} \cos x\, dx$

الدالة $f : x \longmapsto \cos x$ معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$. فهي مستمرة على المجال $[0 ; \pi]$.

الدالة F المعرفة على $[0 ; \pi]$ كما يلي : $F(x) = \sin x$ هي دالة أصلية للدالة f على $[0 ; \pi]$

ينتج أن $\int_{0}^{\pi} \cos x\, dx = F(\pi) - F(0) = \sin\pi - \sin 0 = 0$

و بالتالي $\int_{0}^{\pi} \cos x\, dx = 0$

• حساب التكامل $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$

الدالة $f : x \longmapsto \sin x$ معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$. فهي مستمرة على المجال $[0 ; \pi]$.

الدالة F المعرفة على $[0 ; \pi]$ كما يلي : $F(x) = -\cos x$ هي دالة أصلية للدالة f على $[0 ; \pi]$

ينتج أن $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = F(\pi) - F(0) = -\cos\pi - (-\cos 0) = -1 - (-1) = 0$

و بالتالي $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 0$

• حساب التكامل $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x - 2\sin x) \, dx$

الدالة $f : x \longmapsto 3\cos x - 2\sin x$ معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$. فهي مستمرة على المجال $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

الدالة F المعرفة على $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ كما يلي : $F(x) = 3\sin x + 2\cos x$ هي دالة أصلية للدالة f على $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

ينتج أن
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x - 2\sin x) \, dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \left[3\sin\frac{\pi}{2} + 2\cos\frac{\pi}{2}\right] - \left[3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$= (3\times1 + 2\times0) - (3\times(-1) + 2\times0) = 3 + 3 = 6$$

و بالتالي $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x - 2\sin x) \, dx = 6$

2 استعمال خاصية الخطية لحساب تكامل

تمرين 1

1 • تحقق أن من أجل كل عدد x من $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ ؛ $\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$

2 • احسب $\int_2^3 \frac{2}{x^2 - 1} \, dx$.

حل

1 • من أجل كل عدد x من $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ ؛ $\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} = \frac{(x + 1) - (x - 1)}{(x - 1) - (x + 1)} = \frac{2}{x^2 - 1}$

و بالتالي من أجل كل عدد x من $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ ؛ $\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$

2 • حساب التكامل $\int_2^3 \frac{2}{x^2 - 1} \, dx$

لتكن f الدالة حيث $f : x \longmapsto \frac{2}{x^2 - 1}$

الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ ؛ و مستمرة على كل مجال محتوى في $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$

إذن f مستمرة على المجال $[2 ; 3]$.

و بالتالي فهي تقبل على الأقل دالة أصلية على المجال $[2 ; 3]$.

لدينا $\int_2^3 \frac{2}{x^2 - 1} \, dx = \int_2^3 \left[\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}\right] dx = \int_2^3 \frac{1}{x - 1} \, dx - \int_2^3 \frac{1}{x + 1} \, dx$

(استعمال خاصية الخطية للتكامل)

الدالة F المعرفة على $[2\,;\,3]$ كمايلي : $F(x) = \ln(x-1)$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$ على $[2\,;\,3]$.

والدالة G المعرفة على $[2\,;\,3]$ كما يلي : $G(x) = \ln(x+1)$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$ على $[2\,;\,3]$.

لدينا $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x-1}\,dx = F(3) - F(2) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

$$\int_2^3 \frac{1}{x+1}\,dx = G(3) - G(2) = 2\ln 2 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}$$

ينتج أن $\displaystyle\int_2^3 \frac{2}{x^2-1}\,dx = \ln 2 - \ln\frac{4}{3} = \ln\frac{2}{\frac{4}{3}} = \ln\frac{3}{2}$

إذن $\displaystyle\int_2^3 \frac{2}{x^2-1}\,dx = \ln\frac{3}{2}$.

تمرين 2

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ ؛ كما يلي : $f(x) = \dfrac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2}$

1. اثبت أن من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 ؛ $f(x) = 4(x-1) - \dfrac{1}{(x-1)^2}$
2. احسب $\displaystyle\int_2^4 \frac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2}\,dx$.

حل

1. من أجل كل عددحقيقي يختلف عن 1 ؛ $4(x-1) - \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2}$

$$= f(x)$$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 ؛ $f(x) = 4(x-1) - \dfrac{1}{(x-1)^2}$

2. حساب $\displaystyle\int_2^4 \frac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2}\,dx$.

لدينا الدالة f مستمرة على كل من المجالين $]-\infty\,;\,1[$ و $]1\,;\,+\infty[$.

لأنها دالة ناطقة. و بالتالي الدالة f مستمرة على المجال $[2\,;\,4]$.

فهي تقبل دالة أصلية على المجال $[2\,;\,4]$.

لدينا $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 \frac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2}\,dx = \int_2^4 \left[4(x-1) - \frac{1}{(x-1)^2}\right]dx$

$$= \int_2^4 4(x-1)\,dx + \int_2^4 \frac{-1}{(x-1)^2}\,dx$$

الدالة F المعرفة على $[2\,;\,4]$ كما يلي : $F(x) = 2x^2 - 4x$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto 4(x-1)$ على $[2\,;\,4]$. الدالة G المعرفة على $[2\,;\,4]$ كما يلي : $G(x) = \dfrac{1}{x-1}$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \dfrac{-1}{(x-1)^2}$ على $[2\,;\,4]$.

إذن $\int_2^4 4(x-1)\,dx = F(4) - F(2) = [2(4)^2 - 4(4)] - [2\times2^2 - 4\times2] = 16$

و $\int_2^4 \frac{-1}{(x-1)^2}\,dx = G(4) - G(2) = \left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{1}\right) = -\frac{2}{3}$

ينتج أن $\int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 4(x-1)\,dx + \int_2^4 \frac{-1}{(x-1)^2}\,dx = 16 - \frac{2}{3} = \frac{46}{3}$

إذن $\int_2^4 \frac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2}\,dx = \frac{46}{3}$.

3 استعمال علاقة شال

تمرين 1

1 . احسب كلا من التكاملين $\int_0^3 x(x^2+1)\,dx$ و $\int_{-3}^0 [-x(x^2+1)]\,dx$

2 . استنتج حساب التكامل $\int_{-3}^3 |x|(x^2+1)\,dx$.

حل

1 . لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[-3 ; 3]$ كما يلي : $f(x) = |x|(x^2+1)$

على المجال $[0 ; 3]$ ؛ $f(x) = x(x^2+1)$. و على المجال $[-3 ; 0]$ ؛ $f(x) = -x(x^2+1)$.

الدالة f مستمرة على كل من المجالين $[-3 ; 0]$ و $[0 ; 3]$. إذن تقبل على الأقل دالة أصلية على كل من هذين المجالين. الدالة F المعرفة على $[-3 ; 0]$ كما يلي : $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2$ هي دالة أصلية للدالة f على $[0 ; 3]$. و الدالة G المعرفة على $[-3 ; 0]$ كما يلي : $G(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ هي دالة أصلية f على $[-3 ; 0]$.

ينتج أن $\int_0^3 x(x^2+1)\,dx = F(3) - F(0) = \frac{99}{4}$ و $\int_{-3}^0 [-x(x^2+1)]\,dx = \frac{99}{4}$

2 . $\int_{-3}^3 |x|(x^2+1)\,dx = \int_{-3}^0 -x(x^2+1)\,dx + \int_0^3 x(x^2+1)\,dx = \frac{99}{4} + \frac{99}{4} = \frac{99}{2}$

أي $\int_{-3}^3 |x|(x^2+1)\,dx = \frac{99}{2}$.

تمرين 2

احسب التكامل $\int_{-1}^1 |e^x - 1|\,dx$.

حل

لتكن f الدالة المعرفة على $[-1 ; 1]$ كما يلي: $f(x) = |e^x - 1|$

من أجل كل عدد x من المجال $[-1 ; 0]$ ؛ $f(x) = -(e^x - 1)$

و من أجل كل عدد x من المجال $[0 ; 1]$ ؛ $f(x) = e^x - 1$

الدالة f مستمرة على كل من المجالين $[-1 ; 0]$ و $[0 ; 1]$. إذن تقبل دالة أصلية على الأقل على كل هذين المجالين.

الدالة F حيث $F(x) = -e^x + x$ هي دالة أصلية للدالة f على $[-1 ; 0]$.

و الدالة G حيث $G(x) = e^x - x$ هي دالة أصلية للدالة f على $[0 ; 1]$.

ينتج أن $\int_{-1}^{1} |e^x - 1|\, dx = \int_{-1}^{0} -(e^x - 1)\, dx + \int_{0}^{1} (e^x - 1)\, dx$

$= [F(0) - F(-1)] + [G(1) - G(0)] = \frac{1}{e} + e - 2$

إذن $\int_{-1}^{1} |e^x - 1|\, dx = \frac{1}{e} + e - 2$.

4 استعمال إيجابية التكامل

تمرين

1. اثبت أن $\int_{0}^{\pi} (x + 1 - \sin x)\, dx \geq 0$
2. تحقق من ذلك بحساب هذا التكامل.

حل

1. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0 ; \pi]$ كما يلي : $f(x) = x + 1 - \sin x$

لدينا من أجل كل عدد x من المجال $[0 ; \pi]$ ؛ $0 \leq \sin x \leq 1$.

إذن من أجل كل عدد x من المجال $[0 ; \pi]$ ؛ $0 \leq 1 - \sin x$

ينتج أن من أجل كل عدد x من $[0 ; \pi]$ ؛ $x + 1 - \sin x \geq 0$

بما أن الدالة f مستمرة على المجال $[0 ; \pi]$ فإنها تقبل على الأقل دالة أصلية على $[0 ; \pi]$.

و بما أن من أجل كل عدد x من $[0 ; \pi]$ ؛ $x + 1 - \sin x \geq 0$ فإن $\int_{0}^{\pi} (x + 1 - \sin x)\, dx \geq 0$.

2. التحقق من صحة هذه النتيجة حسابيا .

لدينا الدالة F المعرفة على $[0 ; \pi]$ كما يلي : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \cos x$ هي دالة أصلية للدالة f على $[0 ; \pi]$.

إذن $\int_{0}^{\pi} (x + 1 - \sin x)\, dx = F(\pi) - F(0) = \left(\frac{1}{2}\pi^2 + \pi + \cos\pi\right) - \left(\frac{1}{2}\times 0 + 0 + \cos 0\right)$

إذن $= \frac{1}{2}\pi^2 + \pi - 1 - 1 = \frac{1}{2}\pi^2 + \pi - 2$

و بالتالي $\int_{0}^{\pi} (x + 1 - \sin x)\, dx = \frac{1}{2}\pi^2 + \pi - 2$.

و بما أن $\pi - 2 > 0$ فإن $\frac{1}{2}\pi^2 + \pi - 2 > 0$. ينتج أن $\int_{0}^{\pi} (x + 1 - \sin x)\, dx > 0$

أي أن $\int_{0}^{\pi} (x + 1 - \sin x)\, dx \geq 0$.

ملاحظة : إذا تحقق الشرط $f(x) \geq 0$ على المجال $[a ; b]$ فإنه يضمن إيجابية التكامل أي $\int_{a}^{b} f(x)\, dx \geq 0$ و العكس غير صحيح يمكن أن يكون $\int_{a}^{b} (x + 1 - \sin x)\, dx > 0$ دون تحقق الشرط $f(x) \geq 0$ على كل المجال $[a ; b]$.

لاحظ المثال المضاد: $\int_{-2}^{4} (-x + 2)\, dx$. الدالة $x \longmapsto -x + 2$ ليست دوما موجبة على $[-2 ; 4]$ و $\int_{-2}^{4} (-x + 2)\, dx = 6$.

5 استعمال متباينة المتوسط

تمرين 1

ليكن التكامل I التالي : $I = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{t}{1+t}\right)dt$ برهن أن $\frac{1}{8} \le I \le \frac{1}{3}$، بدون حساب التكامل I.

حل .

من أجل كل عدد t من المجال $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$، $\frac{3}{2} \le 1+t \le 2$ و بالتالي من أجل كل عدد t من $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$، $\frac{1}{2} \le \frac{1}{1+t} \le \frac{2}{3}$.

و بما أن $\frac{1}{2} \le t \le 1$ إذن $\frac{1}{4} \le \frac{t}{1+t} \le \frac{2}{3}$

و بالتالي $\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}\right) \le \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{t}{1+t}\right)dt \le \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)$ (متباينة المتوسط).

أي أن $\frac{1}{8} \le \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{t}{1+t}\right)dt \le \frac{1}{3}$. و بالتالي $\frac{1}{8} \le I \le \frac{1}{3}$.

تمرين 2

a و b عددان حقيقيان ينتميان إلى المجال $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ حيث $a < b$.

1. برهن أن من أجل كل عدد x من المجال $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ ؛ $\frac{1}{cos^2 a} \le \frac{1}{cos^2 x} \le \frac{1}{cos^2 b}$
2. استنتج أن $\frac{b-a}{cos^2 a} \le tan\, b - tan\, a \le \frac{b-a}{cos^2 b}$

حل

1. بفرض $a \le x \le b$، ينتج أن $cos a \ge cos x \ge cos b$ لأن الدالة cos متناقصة على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x من أجل $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ ؛ $\frac{1}{cos a} \le \frac{1}{cos x} \le \frac{1}{cos b}$

لأن $cos a > 0$ و $cos b > 0$ و $cos x > 0$.

ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ ؛ $\frac{1}{cos^2 a} \le \frac{1}{cos^2 x} \le \frac{1}{cos^2 b}$

2. بما أن من أجل كل عدد x من المجال $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ ؛ $\frac{1}{cos^2 a} \le \frac{1}{cos^2 x} \le \frac{1}{cos^2 b}$

فإن $\frac{1}{cos^2 a}(b-a) \le \int_a^b \frac{1}{cos^2 x}dx \le \frac{1}{cos^2 b}(b-a)$ (متباينة المتوسط)

أي أن $\frac{b-a}{cos^2 a} \le \left[tan x\right]_a^b \le \frac{b-a}{cos^2 b}$.

لأن الدالة $x \longmapsto tan x$ دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \frac{1}{cos^2 x}$ على المجال $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

و بالتالي $\frac{b-a}{cos^2 a} \le tan\, b - tan\, a \le \frac{b-a}{cos^2 b}$.

6 حساب القيمة المتوسطة لدالة

تمرين 1

f هي الدالة المعرفة على المجال $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$ كما يلي : $f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

احسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$.

حل

- الدالة f مستمرة على المجال $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$. فهي تقبل على الأقل دالة أصلية على $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$.

الدالة F المعرفة كما يلي : $F(x) = \frac{1}{3}\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ هي دالة أصلية للدالة f على $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$.

القيمة المتوسطة للدالة f على $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$ هي $\frac{1}{\frac{\pi}{6} - 0}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)dx$

لدينا $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)dx = F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F(0) = \frac{1}{3}\sin\left(3\times\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{1}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

إذن $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)dx = \frac{\sqrt{2}}{3}$ و بالتالي $\frac{1}{\frac{\pi}{6} - 0}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)dx = \frac{6}{\pi}\times\frac{\sqrt{2}}{3}$

ينتج أن القيمة المتوسطة للدالة f حيث $f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ على المجال $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$ هي $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

7 استعمال المكاملة بالتجزئة

تمرين

احسب التكاملات التالية باستعمال المكاملة بالتجزئة.

$\int_0^{\pi}(2x + 3)\sin x\,dx$ ؛ $\int_0^{1}(2 - t)\,e^t\,dt$ ؛ $\int_1^{e}x\ln x\,dx$ ؛ $\int_1^{x}\ln t\,dt$ (حيث $x > 1$)

حل

- حساب التكامل $\int_0^{\pi}(2x + 3)\sin x\,dx$

نضع $v(x) = 2x + 3$ و $u'(x) = \sin x$. إذن $v'(x) = 2$ و $u(x) = -\cos x$ (لأن الدالة v قابلة للاشتقاق على $[0\,;\pi]$ و الدالة u' مستمرة على $[0\,;\pi]$).

و بالتالي $\int_0^{\pi}(2x + 3)\sin x\,dx = \left[-(2x + 3)\cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-2\cos x)\,dx$

$= 2\pi + 6 + 2\int_0^{\pi}\cos x\,dx = 2\pi + 6 + 2\left[\sin x\right]_0^{\pi}$

$= 2\pi + 6 + 2\times 0 = 2\pi + 6$

إذن $\int_0^{\pi}(2x + 3)\sin x\,dx = 2\pi + 6$

- حساب التكامل $\int_0^{1}(2 - t)\,e^t\,dt$

نضع $u(t) = 2 - t$ و $v'(t) = e^t$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $[0\,;1]$ و الدالة v' مستمرة على $[0\,;1]$. إذن $u'(t) = -1$ و $v(t) = e^t$.

ينتج أن $\int_0^1 (2+t)\,e^t\,dt = \left[(2-t)\,e^t\right]_0^1 - \int_0^1 (-e^t)\,dt = (-3e+2) + \int_0^1 e^t\,dt$

$$= e - 2 + \left[e^t\right]_0^1 = 2e - 3$$

و بالتالي $\int_0^1 (2-t)\,e^t\,dt = 2e - 3$

. حساب التكامل $\int_1^e x\,\ln x\,dx$

نضع $u'(x) = x$ و $v(x) = \ln x$. الدالة u' مستمرة على $[1\,;\,e]$

و الدالة v قابلة للاشتقاق على $[1\,;\,e]$. إذن $u(x) = \frac{1}{2}x^2$ و $v'(x) = \frac{1}{x}$.

ينتج أن $\int_1^e x\ln x\,dt = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\times\frac{1}{2}x^2\,dx = \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{1}{2}x\,dx$

ينتج أن $= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$

و بالتالي $\int_1^e x\ln x\,dt = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$

. حساب التكامل $\int_1^x \ln t\,dt$ حيث $x > 1$.

نضع $u'(x) = 1$ و $v(t) = \ln t$. الدالة u' مستمرة على $[1\,;\,x]$

و الدالة v قابلة للاشتقاق على $[1\,;\,x]$. إذن $u(x) = t$ و $v'(x) = \frac{1}{t}$.

و بالتالي $\int_1^x \ln t\,dt = \left[t\ln t\right]_1^x - \int_1^x t\times\frac{1}{t}\,dt = x\ln x - \int_1^x 1\,dt$

$$= x\ln x - [t]_1^x = x\ln x - x + 1$$

ينتج أن $\int_1^x \ln t\,dt = x\ln x - x + 1$

8 تعيين الدالة الأصلية لدالة ، تنعدم عند عدد حقيقي معلوم

تمرين

f هي الدالة المعرفة على $]0\,;\,+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \sqrt{x}\ln x$

عين الدالة الأصلية للدالة f التي تنعدم عند العدد 1.

حل

الدالة f معرفة و مستمرة على $]0\,;\,+\infty[$. إذن f تقبل على الأقل دالة أصلية على $]0\,;\,+\infty[$.

الدالة الأصلية للدالة f على $]0\,;\,+\infty[$ و التي تنعدم عند العدد 1 هي الدالة F المعرفة

كما يلي : $F(x) = \int_1^x \sqrt{t}\ln t\,dt$

حساب التكامل $\int_1^x \sqrt{t}\ln t\,dt$ باستعمال المكاملة بالتجزئة.

نضع $u'(t) = \sqrt{t}$ و $v(t) = \ln t$. الدالة u' مستمرة على $]0\,;\,+\infty[$ و الدالة v قابلة للاشتقاق

على $]0\,;\,+\infty[$. إذن $u(t) = \frac{2}{3}t\sqrt{t}$ و $v'(t) = \frac{1}{t}$.

ينتج أن $\int_1^x \sqrt{t}\ln t\,dt = \left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\ln t\right]_1^x - \int_1^x \frac{2}{3}\sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_1^x$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{4}{9}x\sqrt{x} + \frac{4}{9}$$

ينتج أن الدالة الأصلية f التي تنعدم عند العدد 1 هي الدالة F المعرفة على $]0 ; +\infty[$

كما يلي : $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\,\ln x - \frac{4}{9}x\sqrt{x} + \frac{4}{9}$.

9 حساب مساحة حيز من المستوي

تمرين

احسب المساحة $\mathcal{A}$ للحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f المعرفة كما يلي :
$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = \ln 2$ و $x = \lambda$ حيث $\lambda > \ln 2$.

حل

الدالة f موجبة على المجال $[\ln 2 ; \lambda]$.

إذن المساحة هي العدد الموجب $\mathcal{A}$ حيث $\mathcal{A} = \int_{\ln 2}^{\lambda} \frac{e^x}{e^x + 1}\,dx$.

بوضع $u(x) = e^x + 1$. الدالة u معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $[\ln 2 ; \lambda]$ و $u'(x) = e^x$.

إذن $f(x)$ يكتب على الشكل : $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

f تقبل دالة أصلية على $[\ln 2 ; \lambda]$ هي الدالة F المعرفة على المجال $[\ln 2 ; \lambda]$

كما يلي : $F(x) = \ln[u(x)]$. أي من أجل كل عدد x من $[\ln 2 ; \lambda]$ ؛ $F(x) = \ln(e^x + 1)$.

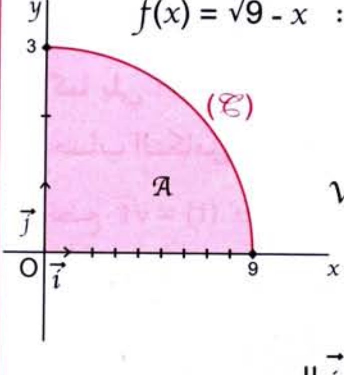
ينتج أن $\mathcal{A} = \int_{\ln 2}^{\lambda} \frac{e^x}{e^x + 1}\,dx = F(\lambda) - F(\ln 2) = \ln(e^\lambda + 1) - \ln(e^{\ln 2} + 1)$

$$= \ln(e^\lambda + 1) - \ln 3 = \ln\left(\frac{e^\lambda + 1}{3}\right)$$

و بالتالي $\mathcal{A} = \ln\left(\frac{e^\lambda + 1}{3}\right)$

10 حساب حجم حيز من الفضاء

تمرين



الرسم التالي يمثل المنحنى $(\mathscr{C})$ للدالة f المعرفة على $[0 ; 9]$ كما يلي : $f(x) = \sqrt{9 - x}$

1 . احسب بالسنتيمتر المربع مساحة الحيز $\mathcal{A}$ للمستوي الملون.

2 . الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

عندما يدور المنحنى $(\mathscr{C})$ حول محور الفواصل، يولد مجسما S_1 حجمه $\mathcal{V}_1$

و عندما يدور حول محور التراتيب يولد مجسما S_2 حجمه $\mathcal{V}_2$.

. احسب الحجم $\mathcal{V}_1$ حيث $\|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1\text{cm}$ و $\|\vec{i}\| = \frac{1}{3}\text{ cm}$.

. احسب الحجم $\mathcal{V}_2$ حيث $\|\vec{j}\| = 1\text{cm}$ و $\|\vec{i}\| = \|\vec{k}\| = \frac{1}{3}\text{ cm}$.

حل

1. حساب مساحة الحيز $\mathcal{A}$.

الحيز $\mathcal{A}$ هو الجزء المحدود بالمنحنى $(\mathcal{C})$ و بمحور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = 0$ و $x = 9$.

و بما أن الدالة f موجبة على المجال $[0 ; 9]$ فإن $\mathcal{A} = \int_0^9 f(x)\,dx$.

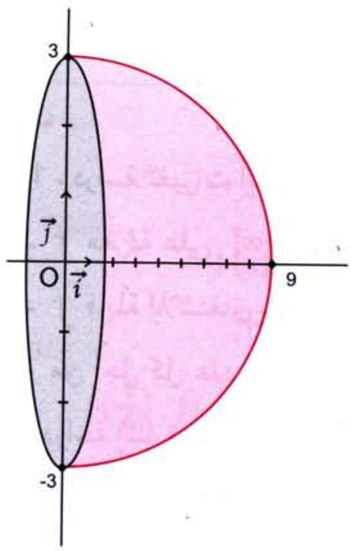
حساب $\int_0^9 f(x)\,dx$.

لدينا من أجل كل عدد x من المجال $[0 ; 9]$ ؛ $f(x) = (9 - x)^{\frac{1}{2}}$

الدالة F حيث $F(x) = -\frac{2}{3}(9 - x)^{\frac{3}{2}}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال $[0 ; 9]$

و بالتالي $\mathcal{A} = \int_0^9 f(x)\,dx = F(9) - F(0) = -\frac{2}{3}(9 - 9)\sqrt{9 - 9} + \frac{2}{3}(9 - 0)\sqrt{9 - 0} = 18$

أي $\mathcal{A} = 18$ (وحدة المساحات).



وحدة المساحات هي $\frac{1}{3}\ \text{cm}^2$ ينتج أن $\mathcal{A} = 6\text{cm}^2$.

2. حساب الحجم $\mathcal{V}_1$.

لدينا $\mathcal{V}_1 = \int_0^9 S(t)\,dt$

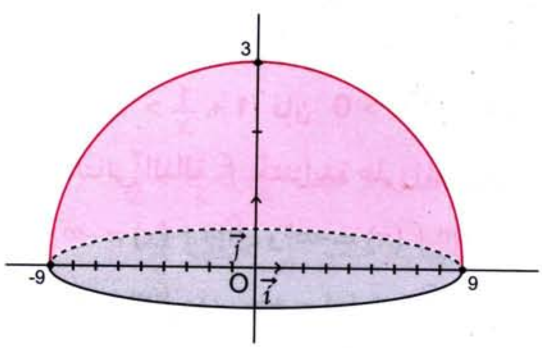
$$= \int_0^9 \pi\left[f(t)\right]^2 dt = \left[\pi\left(9t - \frac{1}{2}t^2\right)\right]_0^9$$

$$= \pi\left(81 - \frac{81}{2}\right) - \pi\times 0 = \frac{81}{2}\pi$$

وحدة الحجوم هي $\frac{1}{3}\ \text{cm}^3$.

و بالتالي $\mathcal{V}_1 = \frac{27}{2}\pi\ \text{cm}^3$ أي $\mathcal{V}_1 \approx 42{,}412\ \text{cm}^3$.

حساب الحجم $\mathcal{V}_2$.



لدينا $\mathcal{V}_2 = \int_0^3 S(t)\,dt$

$$= \int_0^3 9\pi^2\,dt = \left[\left(9\pi^2 t\right)\right]_0^3$$

$$= 9\pi^2\times 3 = 27\pi^2$$

وحدة الحجوم هي $\frac{1}{3}\ \text{cm}^3$.

إذن $\mathcal{V}_2 = 2\pi^2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times 1\ \text{cm}^3 = 3\pi^2\ \text{cm}^3$

و بالتالي $\mathcal{V}_2 \approx 29{,}609\ \text{cm}^3$.

تمارين و حلول نموذجية

تمرين 1

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x) = x + \ln|x| + e^{-x}$ و $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة 1cm)

1 . ادرس تغيرات الدالة f .

2 . ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

3 . أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين x_1 و x_2 حيث $\frac{1}{4} < x_1 < \frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2} < x_2 < -\frac{1}{4}$

4 . عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة A فاصلتها 1.

5 . ارسم $(\mathscr{C}_f)$.

6 . (D) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$ و λ عدد حقيقي أكبر تماما من 1.

احسب المساحة $\mathcal{A}(\lambda)$ للحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$، و المستقيم (D) و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = 1$ و $x = \lambda$.

احسب $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$. يعطي $\ln 2 \approx 0{,}69$ ؛ $e^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}65$.

حل

1 . دراسة تغيرات الدالة f .

• f معرفة على $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$. (أي على $\mathbb{R}^*$).

• f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty ; 0[$ و $]0 ; +\infty[$

و من أجل كل عدد x يختلف عن 0 ؛ $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} - e^{-x}$

• دراسة إشارة $f'(x)$ على كل من المجالين $]-\infty ; 0[$ و $]0 ; +\infty[$.

إذا كان $x < 0$ فإن $-x > 0$ و بالتالي $e^{-x} > 1$.

بما أن $1 + \frac{1}{x} < 1$ فإن $1 + \frac{1}{x} - e^{-x} < 0$ أي على المجال $]-\infty ; 0[$ ؛ $f'(x) < 0$

و بالتالي الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty ; 0[$.

إذا كان $x > 0$ فإن $-x < 0$ و بالتالي $e^{-x} < 1$.

بما أن $1 + \frac{1}{x} > 1$ فإن $1 + \frac{1}{x} - e^{-x} > 0$ أي $f'(x) > 0$ على المجال $]0 ; +\infty[$

و بالتالي الدالة f متنزايدة على المجال $]0 ; +\infty[$.

• $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$ أي $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln|x| = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$. إذن توجد حالة عدم التعيين.

لدينا من أجل $x < 0$ ؛ $f(x) = x + \ln(-x) + e^{-x} = -x\left(-1 + \frac{\ln(-x)}{-x} + \frac{e^{-x}}{-x}\right)$

عندما $x \longrightarrow -\infty$ فإن $-x \longrightarrow +\infty$ و بالتالي $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln(-x)}{-x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty$.

ينتج أن $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[-x\left(-1 + \frac{\ln(-x)}{-x} + \frac{e^{-x}}{-x}\right)\right] = +\infty$ أي $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

من أجل $x > 0$ لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$.

إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \ln x + e^{-x}) = +\infty$. بالتالي $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

• جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

2. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ إذن المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (أي محور التراتيب) مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{\ln|x|}{x} + \frac{e^{-x}}{x}\right) = -\infty$ إذن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل فرع قطع مكافئ منحاه محور التراتيب. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = +\infty$

إذن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل فرع قطع مكافئ منحاه المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

تحديد الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم ذي المعادلة $y = x$ بجوار $+\infty$.

لدينا من أجل كل عدد x أكبر تماما من 1 ؛ $\ln x + e^{-x} > 0$ أي $f(x) - x > 0$

و بالتالي $(\mathscr{C}_f)$ يقع فوق المستقيم ذي المعادلة $y = x$ على المجال $]1 ; +\infty[$.

3. الدالة f معرفة و مستمرة و متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right]$ و $f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

إذن المعادلة تقبل حلا وحيدا x_1 حيث $\frac{1}{4} < x_1 < \frac{1}{2}$.

$\left(f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0{,}413\right.$ و $f\left(\frac{1}{4}\right) \approx -0{,}357$ (إستعمال حاسبة))

و بالتالي $(\mathscr{C}_f)$ يقطع محور الفواصل في النقطة فاصلتها x_1 حيث $\frac{1}{4} < x_1 < \frac{1}{2}$.

لدينا كذلك ؛ f معرفة و مستمرة و متناقصة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{2} ; -\frac{1}{4}\right]$.

$f\left(-\frac{1}{2}\right) \approx 0{,}456$ و $f\left(-\frac{1}{4}\right) \approx -0{,}358$. (باستعمال حاسبة)

و $f\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$. إذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_2 حيث $-\frac{1}{2} < x_2 < -\frac{1}{4}$.

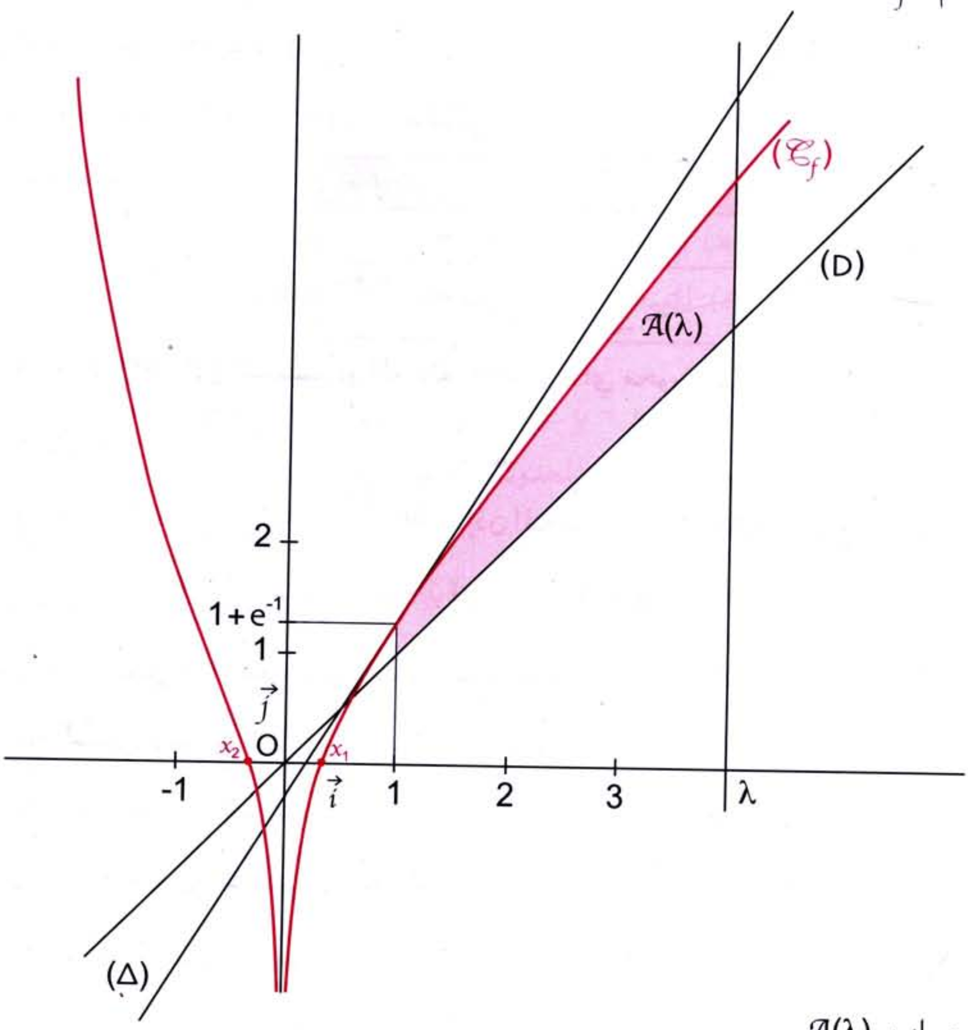
ينتج أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها x_2 حيث $-\frac{1}{2} < x_2 < -\frac{1}{4}$

4. معادلة المماس (Δ) عند النقطة A التي فاصلتها 1.

لدينا $f(1) = 1 + \frac{1}{e}$ ؛ $f'(1) = 2 - \frac{1}{e}$.

معادلة (Δ) هي $y = \left(2 - \frac{1}{e}\right)x - 1 + \frac{2}{e}$.

5. رسم $(\mathscr{C}_f)$.



6. حساب $\mathcal{A}(\lambda)$

على المجال $[1\,;+\infty[$ ؛ $f(x)-x>0$ (لأن $\ln x \geq 0$ و $e^{-x}>0$).

إذن $\mathcal{A}(\lambda)=\int_1^{\lambda}[f(x)-x]\,dx=\int_1^{\lambda}(\ln x+e^{-x})\,dx$

$$=\int_1^{\lambda}\ln x\,dx+\int_1^{\lambda}e^{-x}\,dx=\left[x\ln x-x\right]_1^{\lambda}+\left[-e^{-x}\right]_1^{\lambda}$$

$$=\lambda\ln\lambda-\lambda-e^{-\lambda}+1+\frac{1}{e}=\lambda\left[\ln\lambda-1-\frac{1}{\lambda e^{\lambda}}+\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda e}\right]$$

إذن $\mathcal{A}(\lambda)=\left(\lambda\ln\lambda-\lambda-e^{-\lambda}+1+\frac{1}{e}\right)cm^2$

• حساب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda)$.

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\left[\ln\lambda-1-\frac{1}{\lambda e^{\lambda}}+\frac{1}{\lambda e}+\frac{1}{\lambda}\right]=+\infty$$

إذن $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda)=+\infty$.

تمرين 2

g هي الدالة المعرفة بـ $g(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

$(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة g في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1 • عين مجموعة التعريف D للدالة g.

2 • اثبت أن من أجل كل عدد حقيقي x من D، $g(x) = x + 2 + \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

3 • ادرس تغيرات الدالة g.

4 • ادرس الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathscr{C})$.

• حدد الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم المقارب المائل (Δ).

5 • ارسم المنحنى $(\mathscr{C})$ في المعلم السابق.

6 • a عدد حقيقي أكبر تماما من 4.

• احسب المساحة $S(a)$ للحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C})$ المستقيم المقارب (Δ) و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = 4$ و $x = a$.

ما هي نهاية هذه المساحة لما يؤول a إلى $+\infty$ ؟

حل

1 • $D = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

2 • من أجل كل عدد x يختلف عن 1 ؛ $x + 2 + \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{(x+2)(x-1)^2 + 3(x-1) + 1}{(x-1)^2}$

$$= \frac{x^3}{(x-1)^2} = g(x)$$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x من D ؛ $g(x) = x + 2 + \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

3 • $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ ؛ $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} g(x) = +\infty$ ؛ $\lim_{x \overset{>}{\to} 1} g(x) = +\infty$

الدالة g قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]1 ; +\infty[$ و $]-\infty ; 1[$

و من أجل كل عدد حقيقي x من D ؛ $g'(x) = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$.

إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R} - \{0\}$ ملخصة في الجدول التالي

x	$-\infty$	0		1		3	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	+	‖	-	0	+

جدول تغيرات الدالة يكون كالآتي :

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$+\infty$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

4 • $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = +\infty$ إذن المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$.

من أجل كل عدد حقيقي x من D ؛ $g(x) - (x+2) = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$.

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x) - (x+2)] = 0$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} [g(x) - (x+2)] = 0$.

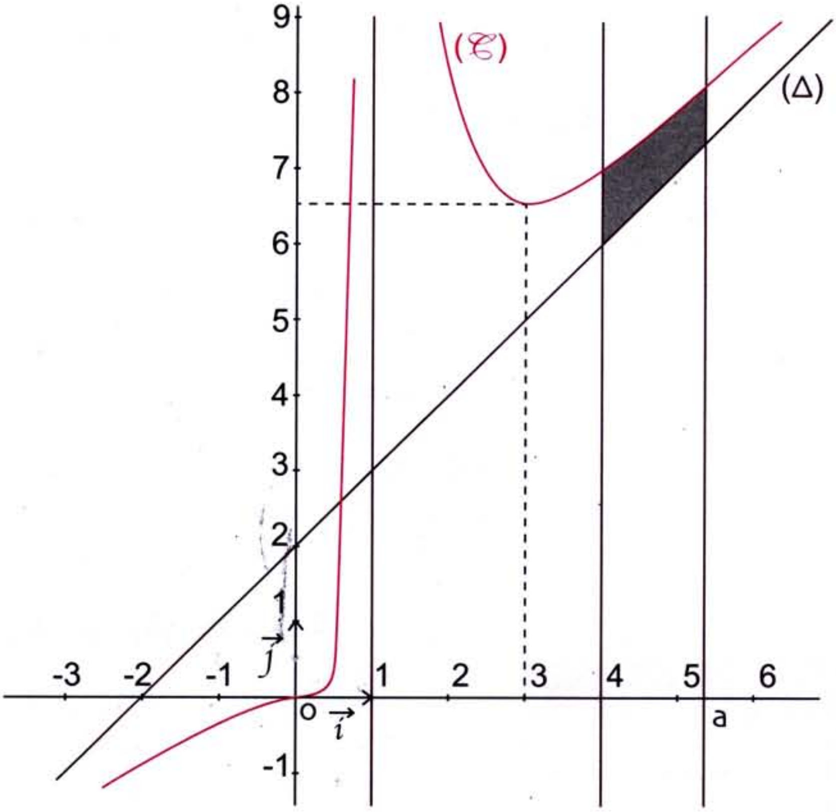
بالتالي المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 2$ مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من D ؛ $g(x) - (x+2) = \frac{3x-2}{(x-1)^2}$.

إشارة العبارة $g(x) - (x+2)$ و الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (Δ) ملخصة في الجدول المقابل

x	$-\infty$		1		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$g(x) - (x+2)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		$(\mathscr{C})$ تحت (Δ)			$(\mathscr{C})$ يقطع (Δ)	$(\mathscr{C})$ فوق (Δ)	

5 • رسم المنحنى $(\mathscr{C})$.



6 • حساب المساحة $S(\text{a})$.

لدينا $g(x) - (x+2) > 0$ على المجال $]4\,;+\infty[$.

إذن $S(\text{a}) = \int_4^{\text{a}} [g(x) - (x+2)]\,dx$.

$$= \int_4^{\text{a}} \left[\frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right] dx = \left[3\ln(x-1) - \frac{1}{x-1}\right]_4^{\text{a}}$$

$$= 3\ln\left(\frac{\text{a}-1}{3}\right) - \frac{1}{\text{a}-1} + \frac{1}{3}$$

إذن $S(\text{a}) = 3\ln\left(\frac{\text{a}-1}{3}\right) - \frac{1}{\text{a}-1} + \frac{1}{3}$.

لدينا $\lim\limits_{\text{a}\to+\infty} 3\ln\left(\frac{\text{a}-1}{3}\right) = +\infty$ و $\lim\limits_{\text{a}\to+\infty} -\frac{1}{\text{a}-1} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ إذن $\lim\limits_{\text{a}\to+\infty} S(\text{a}) = +\infty$.

مسألة

الجزء الأول

g هي الدالة المعرفة على $\mathbf{R}$ كما يلي : $g(x) = 2e^x + 2x - 7$

1 • عين نهايتي g عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2 • ادرس اتجاه تغير الدالة g و انجز جدول تغيراتها.

3 • بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

4 • ادرس إشارة g على $\mathbf{R}$.

الجزء الثاني

f هي الدالة المعرفة على $\mathbf{R}$ كما يلي $f(x) = (2x-5)(1-e^{-x})$

$(\mathscr{C})$ هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o\,;\vec{i},\vec{j})$.

1 • ادرس إشارة f على $\mathbf{R}$.

2 • عين نهايتي f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

3 • احسب $f'(x)$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f. تحقق أن $f'(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الإشارة.

4 • استنتج إتجاه تغير الدالة f و انجز جدول تغيراتها.

5 • أ) برهن أن $f(\alpha) = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$.

ب) ادرس إتجاه تغير الدالة h المعرفة على المجال $\left]-\infty\,;\frac{5}{2}\right]$ كما يلي $h(x) = \frac{(2x-5)^2}{2x-7}$.

جـ) إنطلاقا من حصر العدد α المحصل عليه في الجزء الأول ، أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

د) برهن أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y = 2x - 5$ مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

حدد الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (D).

6 • ارسم المستقيم (D) و المنحنى $(\mathscr{C})$ في المعلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة 2cm).

7 • λ عدد حقيقي أكبر تماما من $\frac{5}{2}$.

عين المساحة $\mathcal{A}(\lambda)$ للحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C})$، محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = 0$ و $x = \lambda$. احسب نهاية $\mathcal{A}(\lambda)$ لما يؤول λ إلى $+\infty$.

حل

الجزء الأول

الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ و $g(x) = 2e^x + 2x - 7$.

1 • حساب $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} 2e^x = 0$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x - 7) = -\infty$ إذن $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

و لدينا أيضا $\lim\limits_{x \to +\infty} 2e^x = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 7) = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

2 • الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ (لأنها مجموع دوال قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$)

و من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $g'(x) = 2e^x + 2$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $e^x > 0$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $2e^x + 2 > 0$

ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $g'(x) > 0$

إذن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة يكون كالآتي

x	$-\infty$ \hfill $+\infty$
$g'(x)$	+
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

3 • الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ إذن g مستمرة على المجال $[0 ; 1]$.

الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ إذن g متزايدة تماما على المجال $[0 ; 1]$.

لدينا $g\left(\frac{1}{2}\right) = -2{,}7$ و $g(1) = 2e + 2 - 7$ أي $g(1) \approx 0{,}44$ إذن $g(1) \cdot g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

بما أن g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ و $g(1) \cdot g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا واحدا α حيث $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

4 • دراسة إشارة g على $\mathbb{R}$.

إشارة $g(x)$ ملخصة في الجدول التالي

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

الجزء الثاني

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ و $f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$.

1 • دراسة إشارة f على $\mathbb{R}$.

إشارة f ملخصة في الجدول التالي

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x - 5$		$-$		$-$	0	$+$	
$1 - e^{-x}$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2 • تعيين $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - e^{-x}) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x - 5) = -\infty$ إذن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

و لدينا أيضا $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - e^{-x}) = 1$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 5) = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

3 • من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) = 2 + (2x - 7)e^{-x}$

نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) = \dfrac{2e^{x} + 2x - 7}{e^{x}}$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) = \dfrac{g(x)}{e^{x}}$

بما أن $e^{x} > 0$ على $\mathbb{R}$ فإن $f'(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الإشارة.

إشارة $f'(x)$ ملخصة في الجدول التالي

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

4 • من جدول إشارة $f'(x)$ ينتج أن

الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty ; \alpha]$ و متزايدة على المجال $[\alpha ; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f يكون كالآتي

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

لدينا $f(\alpha) = (2\alpha - 5)(1 - e^{-\alpha})$

5 • أ) البرهان على أن $f(\alpha) = \dfrac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$.

نعلم أن $g(\alpha) = 0$ أي $2e^{\alpha} + 2\alpha - 7 = 0$ و منه $e^{\alpha} = \dfrac{7}{2} - \alpha$

لدينا $f(\alpha) = (2\alpha - 5)(1 - e^{-\alpha})$ أو $f(\alpha) = (2\alpha - 5)\left(1 - \dfrac{1}{e^{\alpha}}\right)$

و بالتالي $f(\alpha) = (2\alpha - 5)\left(1 - \dfrac{1}{\frac{7}{2} - \alpha}\right)$ بعد التبسيط ينتج أن $f(\alpha) = \dfrac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$.

ب) دراسة إتجاه تغير الدالة h على المجال $\left]-\infty ; \frac{5}{2}\right]$.

لدينا $h(x) = \frac{(2x-5)^2}{2x-7}$

الدالة h قابلة للإشتقاق على المجال $\left]-\infty ; \frac{5}{2}\right]$.

و من أجل كل عدد x من $\left]-\infty ; \frac{5}{2}\right]$ ؛ $h'(x) = \frac{(2x-5)(4x-18)}{(2x-7)^2}$

إشارة $h'(x)$ على $\mathbb{R} - \left\{\frac{7}{2}\right\}$

ملخصة في الجدول المقابل

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$\frac{7}{2}$		$\frac{9}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	-	||	-	0	+	

ينتج أن $h'(x) \geq 0$

على المجال $\left]-\infty ; \frac{5}{2}\right]$ و بالتالي الدالة h متزايدة تماما على المجال $\left]-\infty ; \frac{5}{2}\right]$.

جـ) حصر $f(\alpha)$. نعلم أن $f(\alpha) = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$

لدينا $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ و $f(\alpha) = h(\alpha)$.

الدالة h متزايدة تماما على المجال $\left]-\infty ; \frac{5}{2}\right]$ و α ينتمي إلى هذا المجال

إذن $h(0) < h(\alpha) < h\left(\frac{1}{2}\right)$ حيث $h(0) = -\frac{25}{7}$ و $h\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{3}$

بما أن $f(\alpha) = h(\alpha)$ و $-\frac{25}{7} < h(\alpha) < -\frac{8}{3}$

إذن $-\frac{25}{7} < f(\alpha) < -\frac{8}{3}$ أو $-3,57 < f(\alpha) < -2,67$.

د) لدينا $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (2x-5)] = \lim_{x \to +\infty} [-(2x-5)e^{-x}] = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{2x-5}{-e^{x}}\right)\right] = 0$$

ينتج أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x - 5$ مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

تحديد الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (D).

لذلك ندرس إشارة $f(x) - (2x-5)$. لدينا $f(x) - (2x-5) = -\frac{2x-5}{e^{x}}$

إشارة $f(x) - (2x-5)$ ملخصة في الجدول المقابل.

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x - 5$		-	0	+	
$f(x) - (2x-5)$		+	0	-	

من الجدول السابق ينتج أن

$(\mathscr{C})$ تحت (D) على المجال $\left]\frac{5}{2} ; +\infty\right[$.

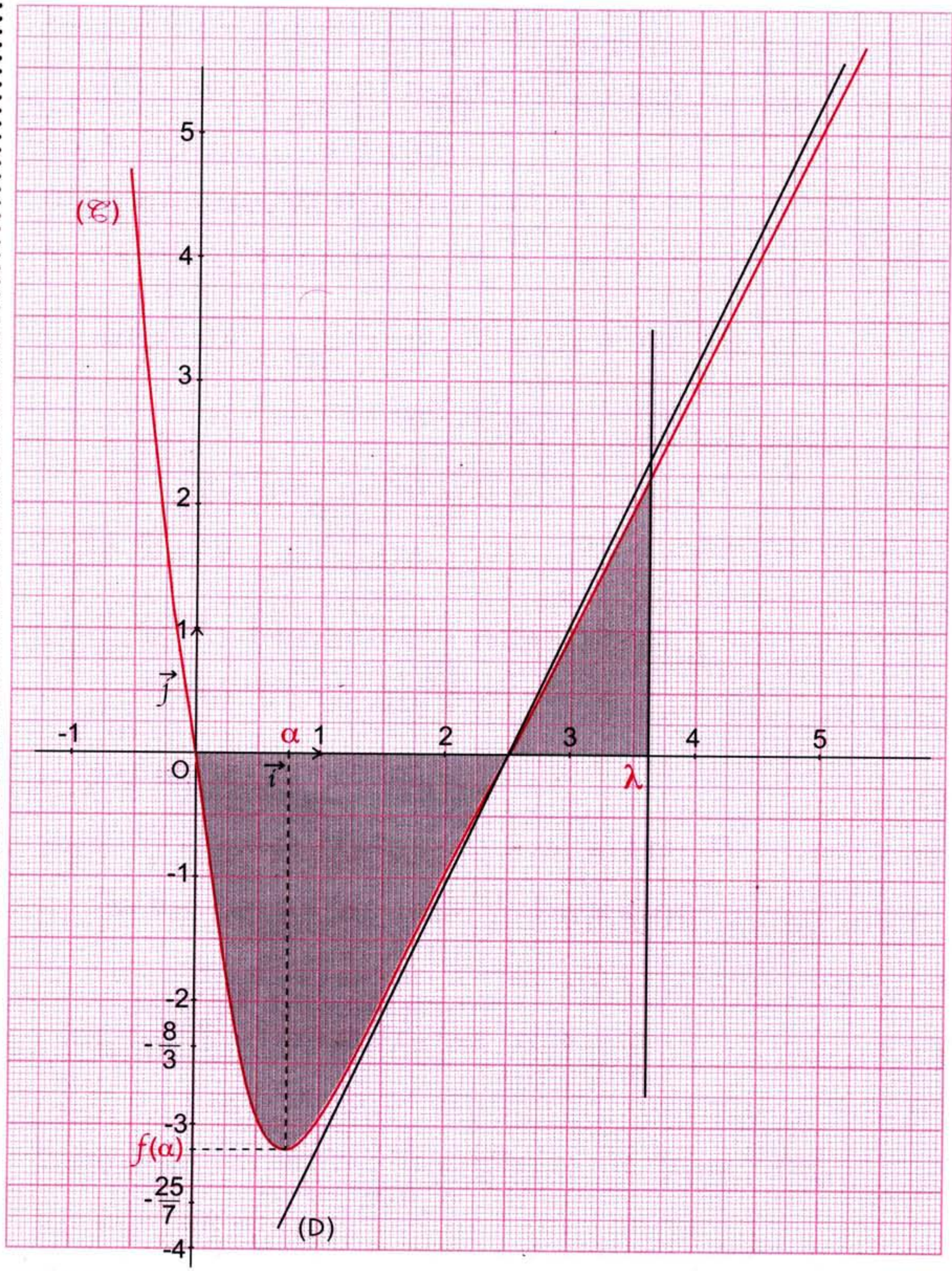
$(\mathscr{C})$ فوق (D) على المجال $\left]-\infty ; \frac{5}{2}\right[$.

$(\mathscr{C})$ يقطع (D) في النقطة ذات الفاصلة $\frac{5}{2}$.

3 • رسم $(\mathscr{C})$ و (D).

• الدالة f تقبل قيمة صغرى $f(\alpha)$ عند α.

• $(\mathscr{C})$ يقطع محور الفواصل في النقطة O و النقطة ذات الفاصلة $\frac{5}{2}$.



7. الدالة f سالبة على المجال $\left[0 ; \frac{5}{2}\right]$ و موجبة على المجال $\left]\frac{5}{2} ; +\infty\right[$

إذن $\mathcal{A}(\lambda) = -\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{5}{2}}^{\lambda} f(x)\,dx$.

حساب التكاملين السابقين باستعمال المكاملة بالتجزئة.

$\mathcal{A}(\lambda) = -\int_0^{\frac{5}{2}} (2x-5)(1-e^{-x})\,dx + \int_{\frac{5}{2}}^{\lambda} (2x-5)(1-e^{-x})\,dx$.

نضع $u(x) = 2x - 5$ و $v'(x) = 1 - e^{-x}$.

الدالة u قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و الدالة v مستمرة على $\mathbb{R}$.

إذن $u'(x) = 2$ و $v(x) = x + e^{-x}$.

$$\int_0^{\frac{5}{2}} (2x-5)(1-e^{-x})\,dx = \left[(2x-5)(x+e^{-x})\right]_0^{\frac{5}{2}} - \int_0^{\frac{5}{2}} 2(x+e^{-x})\,dx$$

$$= \left[(2x-5)(x+e^{-x}) - (x^2 - 2e^{-x})\right]_0^{\frac{5}{2}}$$

$$= \left[(2x-3)e^{-x} + x^2 - 5x\right]_0^{\frac{5}{2}} = 2e^{-\frac{5}{2}} - \frac{13}{4}$$

ينتج أن $\int_0^{\frac{5}{2}} (2x-5)(1-e^{-x})\,dx = 2e^{-\frac{5}{2}} - \frac{13}{4}$

$$\int_{\frac{5}{2}}^{\lambda} (2x-5)(1-e^{-x})\,dx = \left[(2x-5)(x+e^{-x}) - (x^2-2e^{-x})\right]_{\frac{5}{2}}^{\lambda}$$

$$= \left[(2x-3)e^{-x} + x^2 - 5x\right]_{\frac{5}{2}}^{\lambda}$$

$$= (2\lambda-3)e^{-\lambda} + \lambda^2 - 5\lambda - 2e^{-\frac{5}{2}} + \frac{25}{4}$$

ينتج أن $\int_{\frac{5}{2}}^{\lambda} (2x-5)(1-e^{-x})\,dx = (2\lambda-3)e^{-\lambda} + \lambda^2 - 5\lambda - 2e^{-\frac{5}{2}} + \frac{25}{4}$

إذن $\mathcal{A}(\lambda) = -\left(2e^{-\frac{5}{2}} - \frac{13}{4}\right) + (2\lambda-3)e^{-\lambda} + \lambda^2 - 5\lambda - 2e^{-\frac{5}{2}} + \frac{25}{4}$

$$= (2\lambda-3)e^{-\lambda} + \lambda^2 - 5\lambda - 4e^{-\frac{5}{2}} + \frac{19}{2}$$

و بالتالي $\mathcal{A}(\lambda) = 4\left[(2\lambda-3)e^{-\lambda} + \lambda^2 - 5\lambda - 4e^{-\frac{5}{2}} + \frac{19}{2}\right] cm^2$

• حساب $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

لدينا $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} (2\lambda-3)e^{-\lambda} = 0$ و $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \left(\lambda^2 - 5\lambda - 4e^{-\frac{5}{2}} + \frac{19}{2}\right) = +\infty$

إذن $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = +\infty$.

تمارين و مسائل

حساب تكاملات باستعمال دوال أصلية

1 احسب التكاملات التالية :

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$ ؛ $\int_{2}^{4} \frac{1}{x} dx$ ؛ $\int_{-1}^{2} (x^2 + x) dx$

$\int_{-3}^{-1} (t+3)^3 dt$ ؛ $\int_{4}^{9} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ ؛ $\int_{-3}^{-1} \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta \cos^3\theta \, d\theta$ ؛ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) dx$

$\int_{0}^{1} \frac{2x}{4-x^2} dx$ ؛ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, e^{\cos x} dx$

$\int_{e}^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx$ ؛ $\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt$ ؛ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, dt$

إستعمال خاصية الخطية

2 f دالة معرفة على المجموعة $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$

1. أثبت أنه يوجد عددان حقيقيان α و β حيث من أجل كل عدد x من $\mathbb{R} - \{-2 ; 2\}$ ؛

$$f(x) = \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x+2}$$

2. استنتج التكامل $\int_{0}^{1} f(x) \, dx$.

3 1. تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{-1 ; 3\}$ ؛

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{1}{4(x-3)} - \frac{1}{4(x+1)}$$

2. احسب $\int_{0}^{2} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} dx$.

4 1. أوجد عددين حقيقيين a و b حيث من أجل كل عدد x من $\mathbb{R} - \{-1 ; 0\}$ ؛

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

2. احسب التكامل $\int_{1}^{2} \frac{1}{x(x+1)} dx$.

5 عين ثلاثة أعداد حقيقية α ، β و γ حيث من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 0 و 1-

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x+1}$$

احسب عندئذ التكامل $\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2(x+1)} dx$

6 x عدد حقيقي و I_1 و I_2 هما التكاملان التاليان :

$$I_2 = \int_0^x \sin^2 t \, dt \quad \text{و} \quad I_1 = \int_0^x \cos^2 t \, dt$$

1. احسب $I_1 + I_2$ و $I_1 - I_2$
2. استنتج I_2 و I_1
3. تحقق من صحة نتائج ② بالتعبير عن $\cos^2 t$ و $\sin^2 t$ بدلالة $\cos 2t$.

استعمال علاقة شال

7 احسب التكاملات التالية :

$\int_{-2}^{4} |x^2 - 4| \, dx$ ؛ $\int_{-1}^{3} |x-2| \, dx$

$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left|2 - \frac{2}{x}\right| dx$ ؛ $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin t| \, dt$

8 1. احسب التكاملين التاليين :

$\int_{-\frac{1}{2}}^{2} (2t+1) \, dt$ و $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (-2t-1) \, dt$

2. استنتج حساب التكامل التالي : $\int_{-1}^{2} |2t+1| \, dt$

استعمال إيجابية التكامل

9 1. نقبل أن من أجل كل عدد حقيقي t موجب تماما، $\ln t \leq t - 1$.

استنتج، بدون حساب، إشارة التكامل $\int_1^x (t - 1 - \ln t) dt$ حسب قيم العدد x الموجب تماما.

2. تحقق أن الدالة $t \longmapsto \frac{1}{2}t^2 - \ln t$ هي دالة أصلية للدالة $t \longmapsto t - 1 - t\ln t$ على المجال $]0 ; +\infty[$.

استنتج حساب التكامل $\int_1^x (t - 1 - \ln t) \, dt$.

حساب القيمة المتوسطة لدالة

10 في كل حالة من الحالات التالية، احسب القيمة المتوسطة u للدالة f بين a و b.

1. $f(x) = (x-2)\,e^x$ ؛ $a = 0$ ، $b = 1$
2. $f(x) = x\cos x + \sin x$ ؛ $a = -\frac{\pi}{2}$ ، $b = 0$
3. $f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)\ln x$ ؛ $a = 1$ ، $b = e$
4. $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ ؛ $a = 0$ ، $b = \pi$
5. $f(x) = \sqrt{x}$ ؛ $a = 1$ ، $b = 16$
6. $f(x) = x^2 - 9$ ؛ $a = -3$ ، $b = 3$
7. $f(x) = \cos^2 x$ ؛ $a = 0$ ، $b = \pi$
8. $f(x) = \sin^2 x$ ؛ $a = 0$ ، $b = \pi$

المكاملة بالتجزئة

11 احسب التكاملات التالية باستعمال المكاملة بالتجزئة.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt$ ؛ $\int_0^1 (3-t)\,e^t\,dt$

$\int_0^{\pi} (3x+2)\sin x\,dx$ ؛ $\int_0^{\pi} (-x+3)\cos x\,dx$

$\int_1^{x} t\ln t\,dt$ ؛ $\int_1^{x} \ln t\,dt$

$\int_0^{2} xe^x\,dx$ ؛ $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

$\int_1^{e} \frac{\ln t}{t^2}\,dt$ ؛ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x-1)\sin(2x^2 - x)\,dx$

12 احسب التكاملات التالية باستعمال المكاملة بالتجزئة مرة واحدة أو أكثر.

$\int_0^1 t^2e^t\,dt$ ؛ $\int_0^1 (3t^2 - t + 1)\,e^t\,dt$

$\int_0^1 t^2e^{3t}\,dt$ ؛ $\int_0^{\pi} e^t\cos t\,dt$

$\int_0^{\pi} e^t\sin t\,dt$ ؛ $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x\,e^{2x}\,dx$

$\int_1^{e^2} \sqrt{x}\ln x\,dx$ ؛ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\sin 2t\,dt$

حساب المساحات

13 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 5cm$

1. ارسم المنحنى $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x - x^3$.
2. احسب بـ cm^2 ؛ مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C})$، محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = 0$ و $x = 1$.

14 1. ارسم المنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ الممثلين للدالتين f و g المعرفتين كما يلي : $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = e^{x-1}$ في المستوي المنسوب إلى المعلم $(o;\vec{i},\vec{j})$ المتعامد و المتجانس.

2. احسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = 1$ و $x = e$.

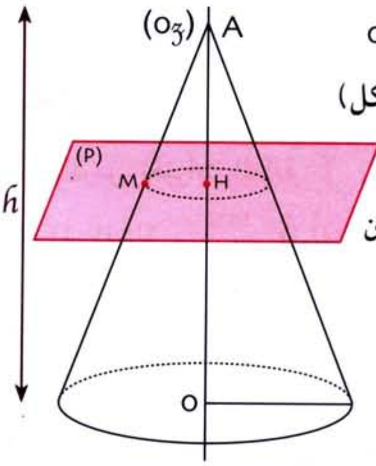
15 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = xe^{-x}$ و a عدد حقيقي موجب تماما.

1. ارسم المنحنى $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ الوحدة 4 cm.
2. احسب مساحة الحيز $\mathcal{A}(a)$ للمستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C})$، محور الفواصل و المستقيم ذوي المعادلتين $x = 0$ و $x = a$.
3. احسب نهاية $\mathcal{A}(a)$ عندما يؤول a إلى $+\infty$.

حساب حجم مخروط الدوران

16 مخروط رأسه A و محوره (oz) و قاعدته القرص الذي مركزه o و ارتفاعه h. (الشكل)

احسب حجم هذا المخروط علما أن نصف قطر قاعدته هو R ؛ $(R > 0)$ و $oH = z$.



مسائل

17 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j})$ ؛ الوحدة 1 cm.

1 • ارسم المنحنى $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

على المجموعة $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$

2 • احسب $\int_2^3 \ln(x-1)\,dx$.

3 • احسب بنفس الكيفية $\int_2^3 \ln(x+1)\,dx$

4 • احسب مساحة الحيز $\mathcal{A}$ المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C})$ و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = 2$ و $x = 3$.

18 f هي الدالة المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$(\mathscr{C})$ هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

(الوحدة هي 1 cm).

1 • ادرس تغيرات الدالة f .

2 • احسب مساحة الحيز المستوي $\mathcal{A}$ المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C})$ و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = 1$ و $x = e^2$.

19 f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2}.$$

$(\mathscr{C}_f)$ هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

m عدد حقيقي حيث $m \geq 1$.

يرمز $\mathcal{A}(m)$ إلى التكامل $\int_1^m |2x - f(x)|\,dx$

1 • احسب $\mathcal{A}(m)$ باستعمال المكاملة بالتجزئة.

2 • احسب، إن وجدت، نهاية $\mathcal{A}(m)$ عندما يؤول m إلى $+\infty$.

20 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x) = (2x-1)e^{-2x}.$$

$(\mathscr{C}_f)$ هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

(الوحدة 2 cm).

1 • ادرس تغيرات الدالة f .

2 • ارسم المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في المعلم السابق.

3 • λ عدد حقيقي أكبر تماما من $\frac{1}{2}$ و $\mathcal{A}(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = \frac{1}{2}$ و $x = \lambda$.

• بواسطة المكاملة بالتجزئة، احسب المساحة $\mathcal{A}(\lambda)$ بدلالة λ.

• احسب $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

4 • نعتبر الدالتين h و H المعرفتين على $\mathbb{R}$

كمايلي : $h(x) = (2x+1)^2 e^{-4x}$

و $H(x) = \left(-x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}\right) e^{-4x}$

• بيّن أن الدالة H هي دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

5 • ليكن S الحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = -\frac{1}{2}$ و $x = \frac{1}{2}$.

يرمز v إلى حجم المجسم المولد من دوران الحيز S حول محور الفواصل.

نذكر أن v معبر عنه كما يلي: $v = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2 dx$

• عيّن القيمة المضبوطة للحجم v بواسطة وحدة الحجوم ثمّ قيمة مقربة للحجم v إلى 10^{-3}.

21 f هي الدالة المعرفة كما يلي :

$f(x) = x \ln|x|$ إذا كان $x \in \mathbb{R}^*$ و $f(0) = 0$.

1 • هل الدالة f مستمرة عند العدد 0 ؟

هل هي قابلة للاشتقاق عند 0 ؟

2 • ادرس تغيرات الدالة f و ارسم المنحنى $(\mathcal{C})$ الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

3 • باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب المساحة $\mathcal{A}$ للحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathcal{C})$ و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = \frac{1}{e}$ و $x = 1$.

22 لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ كما يلي :

$f(x) = x|\ln x|$ إذا كان $x \in]0 ; +\infty[$ و $f(0) = 0$.

1 • ادرس استمرارية الدالة f و قابلية اشتقاقها على المجال $[0 ; +\infty[$.

2 • ادرس تغيرات الدالة f و ارسم المنحنى $(\mathcal{C})$ الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

3 • t عدد حقيقي من المجال $]0 ; 1[$.

احسب، باستعمال المكاملة بالتجزئة، المساحة $\mathcal{A}(t)$ للحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathcal{C})$ و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = 1$ و $x = t$.

احسب $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \mathcal{A}(t)$.