

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (4 نقاط)

1. الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(1;2;7)$, $B(2;0;2)$, $C(4;2;4)$, $D(3;5;-1)$
أ- بين أن النقط A, B, C تعين مستو.

ب- عين طبيعة المثلث ABC ثم أحسب مساحته.

ج- بين أن $\vec{n}(1;b;c)$ شعاعا ناظما للمستوي (ABC) حيث b و c عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما .

د- تحقق أن المعادلة $x-2y+z-4=0$ هي معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .

2. ليكن المستقيم (Δ) حيث الجملة التالية : $\begin{cases} x=2t+3 \\ y=-4t+5 \\ z=2t-1 \end{cases}$ ($t \in \mathbb{R}$) تمثيلا وسيطيا له.

أ- بين أن المستوي (ABC) عمودي على المستقيم (Δ) .

ب- عين إحداثيي H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوي (ABC) ثم أحسب المسافة بين D و النقطة H

ج- بين أن $ABCD$ هو رباعي وجوه ثم أحسب حجمه.

التمرين الثاني : (5 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C التي لواحقها على

الترتيب : $Z_A = 1-2i$, $Z_B = -2+2i$, $Z_C = 1$. ولتكن (δ) الدائرة التي قطرها القطعة المستقيمة $[AB]$.

1. أ- عين اللاحقة Z_Ω للنقطة Ω مركز الدائرة (δ) ونصف قطرها r .

ب- D نقطة لاحقتها $Z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$ أكتب Z_D على الشكل الجبري ثم بين أن D نقطة من الدائرة (δ) .

2. لتكن E نقطة من الدائرة (δ) ذات اللاحقة Z_E بحيث : $(\overline{\Omega C}; \overline{\Omega E}) = \frac{\pi}{4}$

أ) حدد طولها وعمدة للعدد $Z_E + \frac{1}{2}$ واستنتج أن : $Z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$

ب) ليكن التحويل النقطي τ الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ بحيث : $z' + \frac{1}{2} = e^{\frac{\pi}{4}} \left(z + \frac{1}{2} \right)$

حدد طبيعة التحويل τ وعناصره المميزة .

3. (Δ) هو مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z والتي تحقق : $\arg(z) = \arg(\bar{z}) + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

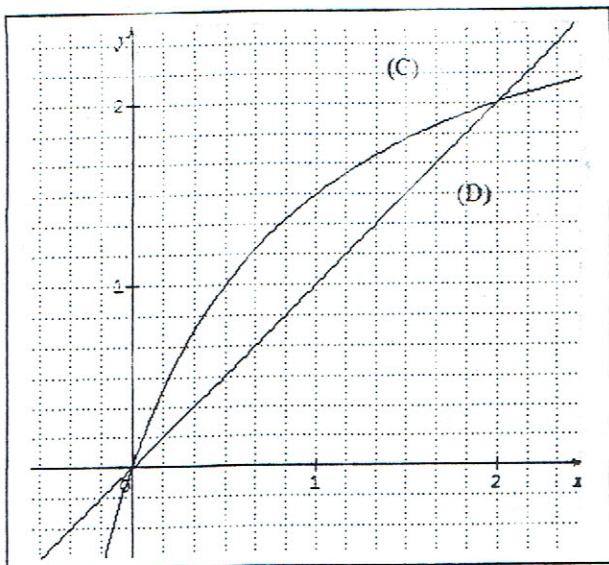
بين أن (Δ) هو محور الفواصل بإستثناء النقطة O .

التمرين الثالث: (4.5 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بعدها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = h(u_n)$

(1) لتكن h الدالة المعرفة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كمايلي $h(x) = \frac{3x}{x+1}$ و (C) تمثيلها البياني و (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس . (أنظر الشكل)

أ/ أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 . مظهرا خطوط الرسم



ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

(2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 2$

ب- أثبت أن (u_n) متزايدة تماما. هل هي متقاربة؟

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} كمايلي : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول.

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

ج - أحسب نهاية (u_n) .

التمرين الرابع : (6.5 نقاط)

لتكن f دالة عددية معرفة على $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ بالعبارة : $f(x) = \frac{xe^x - x - 2}{e^x - 1}$ وليكن (C_f) منحنها البياني في

معلم متعامد متجانس $(\bar{O}; \bar{I}; \bar{J})$.

I. 1) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها مفسرا النتائج بيانيا.

2) أوجد العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون $f(x) = ax + \frac{b}{e^x - 1}$

3) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم : $f'(x) = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x - 1)^2}$

4) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

II. 1- بين أن (C_f) منحنى الدالة f يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') حيث $y = x + 2$ و $y = x$

معادلتاهما على الترتيب.

2. حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لكل من المستقيمين (Δ) و (Δ') .

3. بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين x_1 و x_2 حيث $x_1 \in]1.10; 1.05[$ و $x_2 \in]-2.30; -2.20[$

4- أحسب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $[f(-x) + f(x)]$ فسر النتيجة هندسيا.

5- أرسم المستقيمين (Δ) و (Δ') وأنشئ المنحنى (C_f) .

6- ليكن m عدد حقيقي ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$.

III. من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما نعتبر الدالة F المعرفة بـ : $F(x) = ax^2 + bx + c[\ln(e^x - 1)]$

أوجد الأعداد الحقيقية a, b, c و حتى تكون F دالة أصلية للدالة f .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (5 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ النقط $C(2;0;1)$, $B(1;-1;0)$, $A(1;1;1)$ والمستوي (P) ذو المعادلة: $x - 2y - 2z + 6 = 0$

1. بين أن النقط B, A, C تشكل مستو.
2. بين أن $x + y - 2z = 0$ هي معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .
3. بين أن المستويان (P) و (ABC) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) الذي يشمل $E(-2;2;0)$ و $\vec{u}(2;0;1)$ شعاع توجيه له.
4. أثبت أن النقطة O هي مرجح الجملة $\{(A,1)(B,1)(C,-1)\}$
5. أ) عين (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $\|\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}\| = 2\sqrt{3}$
ب) أحسب إحداثيي D و E نقطتي تقاطع (S) و (Δ) .
ج) ماهي طبيعة المثلث ODE ثم استنتج المسافة بين النقطة O والمستقيم (Δ) .

التمرين الثاني: (5 نقاط)

- 1- نعتبر في \mathbb{C} كثير الحدود $P(z) = z^3 + (-2\sqrt{3} + i)z^2 + (4 - 2i\sqrt{3})z + 4i$
أ. بين أن من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z+i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$
ب. حل في \mathbb{C} المعادلة: $P(z) = 0$
نرمز بـ z_0, z_1 و z_2 إلى حلول المعادلة حيث z_1 الحل الذي جزؤه التخيلي موجب و z_2 الحل الذي جزؤه التخيلي سالب و z_0 الحل الآخر.
ج. أكتب العدد المركب L على الشكل الأسّي حيث: $L = \frac{z_1}{z_2}$
د. عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون L^n عدد حقيقي موجب تماما.
- 2- في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط B, A, C التي لواحقها على الترتيب: $z_C = -i$, $z_B = \sqrt{3} - i$, $z_A = \sqrt{3} + i$
أ. مثل النقط B, A, C مبينا كيفية الإنشاء هندسيا.
ب. أحسب $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC
ج. عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $\|3\vec{MA} - 2\vec{MB} + \frac{3}{2}\vec{MC}\| = 5$ حيث G مرجح الجملة $\{(A;6)(B;-4)(C;3)\}$
د. عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S حيث $S(A) = C$ و $S(B) = B$.

التمرين الثالث : (4 نقاط)

$$\alpha \in \mathbb{R}_+^* \text{ حيث } \begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n^2 \end{cases} : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ متتالية عددية معرفة كمايلي :}$$

- 1) عين قيم α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.
- 2) نفرض أن $\alpha \neq \frac{2}{3}$ ونضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln u_n + \ln \frac{3}{2}$.
أ. بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 بدلالة α .
ب. أكتب عبارة v_n بدلالة n و α .
ج. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} \alpha \right)^{2^n}$
د. عين قيم العدد الحقيقي α بحيث تكون (u_n) متقاربة.

التمرين الرابع : (6 نقاط)

I. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بالعلاقة : $g(x) = x - 3 + \ln x$

- 1) أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها .
- 2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2 < \alpha < 3$. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

II. لتكن f دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ بالعلاقة : $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(-2 + \ln x) + 2$

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1- أحسب نهايتي الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
- 2- أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها .
- 3- أرسم (C_f) التمثيل البياني للدالة f .

III. 1- بين أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $f(x) - \ln x = \frac{2 - \ln x}{x}$

ثم استنتج الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمنحني (C_{\ln}) الممثل للدالة \ln .

2- نعتبر الدالة H المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بالعلاقة : $H(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$

3- بين أن H دالة أصلية للدالة h على المجال $]0; +\infty[$ حيث : $h(x) = \frac{\ln x}{x}$

4- أحسب مايلي : $\int_1^{e^2} \frac{2 - \ln x}{x} dx$ ثم فسر النتيجة هندسيا.