اختبار في مادة:الرياضيات — المدة:3 سا و نصف

على المترشح أن يختار موضوعا واحدا من الموضوعين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4 نقاط)

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0=-1$ ، $u_1=\frac{1}{2}$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+2}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n$

و لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$

1) أ ـ اثبت أن (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول.

ب ـ اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n .

ج ـ احسب بدلالة n المجموع: $s_n=v_0+v_1+\cdots v_n$ ثم حدد $\lim_{n\to+\infty} s_n$.

2) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $w_n=\frac{u_n}{v_n}$

أ ـ اثبت أن (w_n) حسابية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول.

ب ـ اكتب بدلالة n عبارة الحد العام w_n ثم عين أصغر عدد طبيعي n الذي يحقق: $e^{w_n}>2018$

التمرين الثاني: (4 نقاط)

يضم كيس خمس كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى 5 وثلاث كرات حمراء مرقمة من 6 إلى 8 وكرتين خضراوين تحملان الرقمين 9 و 10(الكرات لا نفرق بينها عند اللمس). نسحب عشوائيا كرتين من الكيس في آن واحد.

1) ما احتمال وقوع الحوادث التالية: A " الكرتان المسحوبتان تحملان رقمين فرديين " .

B " الكرتان المسحوبتان من نفس اللون " و C " الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين "

هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟

2) ما احتمال سحب رقم زوجي على الأقل ؟

3) ما احتمال سحب كرتين تحملان رقمين فرديين علما أنهما من لونين مختلفين ؟

4) ما هو عدد الكرات البيضاء الممكن إضافتها إلى الكيس حتى يكون عدد الحالات الممكنة يساوي120 ؟

[redacted]

<u>التمرين الثالث:</u> (5 نقاط)

I) نعتبر الأعداد المركبة: $z_1=\dfrac{-\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ ، $z_2=-1-i$ و $z_3=z_1\times z_2$

1) اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي ثم استنتج الشكل الأسي لاعدد z_3 .

2) اكتب z_3 على الشكل الجبري ثم استنتج القيم المضبوطة لـ: $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12}$

II) ليكن كثير الحدود: $p(z)=|z|^2-3\left(z-\bar{z}\right)-13+12i$ حيث: $z=x+iy$ و x و y عددان حقيقيان.

1) اكتب $p(z)$ على الشكل الجبري.

2) عين (E) مجموعة النقط $M(x;y)$ حتى يكون $p(z)$ تخيلي صرف.

III) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ النقط A ، B حيث:

$z_A=z_1$ و $z_B=z_2$ و f تحويل نقطي مركزه المبدأ و يحول النقطة A إلى B .

1) بين أن التحويل f دوران .

2) حدد صورة (E) بالتحويل f .

<u>التمرين الرابع:</u> (7 نقاط)

I) g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-1+\ln x$

1) بين أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

2) احسب $g(1)$ ثم حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln x-\dfrac{\ln x}{x}$

1) أ ـ بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$.

ب ـ بين أن: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ج ـ بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ثم شكل جدول تغيرات f .

2) ليكن (Γ) المنحنى الممثل للدالة $\ln$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

أ ـ بين أن المنحني (Γ) مقارب للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$.

ب ـ ادرس الوضعية النسبية بين المنحيين (Γ) و (C_f) .

ج ـ احسب $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ثم ارسم المنحيين (Γ) و (C_f) في نفس المعلم .

3) عين قيم العدد الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x)=f(m)$ حلين متمايزين.

4) احسب التكامل $I=\int_1^e\left[\ln x-f(x)\right]dx$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

انتهى الموضوع الأول

[redacted]

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. و لكن المستويين (P) و (Q) الذين معادلتيهما $x+2y-z+1=0$ و $-x+y+z=0$ على الترتيب و A نقطة حيث $A(0;1;1)$.

1) اثبت أن المستويين (P) و (Q) متعامدان .

2) برهن أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق المستقيم (Δ) ذو تمثيل وسيطي

$$(t\in\mathbb{R}):\begin{cases} x=-\dfrac{1}{3}+t \\ y=-\dfrac{1}{3} \\ z=t \end{cases}$$

3) احسب المسافة بين A و كل من المستويين (P) و (Q).

4) استنتج المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ).

التمرين الثاني: (4 نقاط)

1) ليكن كثير الحدود: $p(z)=z^3-3z^2+3z-9$

أ ـ تحقق أن 3 جذر لكثير الحدود $p(z)$.

ب ـ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z)=0$.

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ النقط A، B، C، D و F حيث: $z_A=3$ و $z_B=i\sqrt{3}$ و $z_C=-i\sqrt{3}$ و $z_D=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ و $z_F=1-i\sqrt{3}$

أ ـ ما طبيعة المثلث ABC ؟

ب ـ اوجد z_E لاحقة النقطة E صورة D بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$.

ج ـ احسب $\dfrac{z_F}{z_E}$ و استنتج أن المستقيمين (OE) و (OF) متعامدان.

د ـ عين z_G لاحقة النقطة G حتى يكون الرباعي $OEGF$ مربعا.

[redacted]

التمرين الثالث: (4 نقاط)

لتكن $(\mathcal{U}_n)$ متتالية حدودها موجبة حيث : $\mathcal{U}_1 = 1$ و $n \in \mathbb{N}^*$, $(\boldsymbol{\mathcal{U}_{n+1}})^2 = 2\mathcal{U}_n$

1) أحسب $\mathcal{U}_2$ ، $\mathcal{U}_3$ ، $\mathcal{U}_4$ (تعطى النتائج على شكل قوى العدد 2)

2) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $\mathcal{V}_n = \ln \mathcal{U}_n - \ln 2$ (يرمز ln الى دالة اللوغاريتم النيبيري)

أ– بين أن $(\mathcal{V}_n)$ متتالية هندسية يطلب أساسها و حدها الاول .

ب ـ اكتب بدلالة n عبارة الحد العام لكل من v_n و u_n .

ج– أحسب $\lim \mathcal{V}_n$ ثم $\lim \mathcal{U}_n$

3) أ ـ بين أنه من أجل كل n من □ : $e^{v_n} = \dfrac{u_n}{2}$

ب ـ احسب الجداء : $p = \dfrac{u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n}{2^n}$

التمرين الرابع: (8 نقاط)

I) لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x و المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = e^{-x} + x$

1) أدرس تغيرات الدالة g.

2) استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $1 + xe^{x} > 0$

II) لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x) = \ln(e^{-x} + x)$

و ليكن (C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1– تحقق من اجل كل x حقيقي فان : $f(x) = \ln(1 + xe^{x}) - x$

2– أدرس تغيرات الدالة f

3–بين أن المستقيم $(\Delta): y = -x$ مقاربا للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ ، ثم أدرس وضعيته بالنسبة لـ (C_f)

4–لتكن دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ : $h(x) = f(x) - \ln x$

أ– أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$

ب– أدرس اشارة العبارة $h(x)$

ج– فسر النتائج السابقة بيانيا بين المنحنى (C_f) و منحنى دالة اللوغاريتم النيبيري

5– أرسم بعناية المنحنى (C_f)

انتهى الموضوع الثاني

[redacted]