

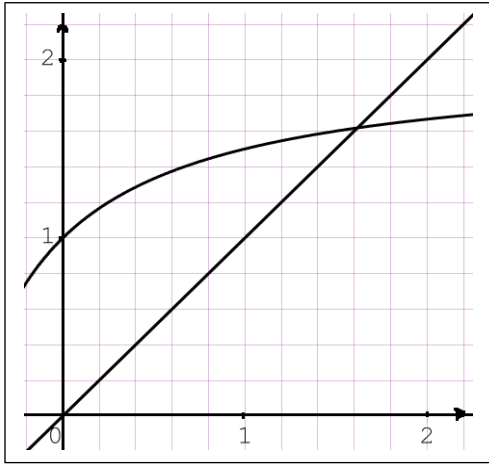
المستوى: الثالثة ثانوي
الشعبة: العلوم التجريبية

ثانوية الشهيد محمد بوجمعة لوطاية بسكرة
الموسم الدراسي: 2018/2019

الفرض الأول للثلاثي الثاني لمادة الرياضيات
المدة: 1 ساعة

نص الفرض :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;2]$ بـ $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ كما هو موضح في الشكل أدناه :



(1) أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم

استنتج أنه إذا كان $x \in [1;2]$ ، فإن $f(x) \in [1;2]$.

(2) (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان بـ : $u_0 = 1$ ، $v_0 = 2$

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$ ، $v_{n+1} = f(v_n)$.

أ. مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، v_0 ، v_1 .

لكل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) . مبرزا خطوط الانشاء.

ب. أعط تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

(3) برهن بالتراجع عن الخواص التالية : من أجل كل عدد طبيعي n :

" $1 \leq u_n \leq 2$ " ؛ " $1 \leq v_n \leq 2$ " ؛ " $u_n \leq u_{n+1}$ " و " $v_n \geq v_{n+1}$ " .

(4) أ. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)}$.

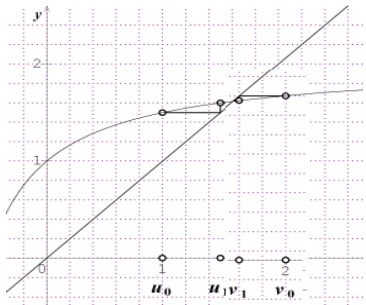
ب. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n - u_n \geq 0$ و $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$.

ج. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

د. استنتج أن للمتتاليتين (u_n) و (v_n) نفس النهاية l .

هـ. عين القيمة المضبوطة للعدد l .

بالتوفيق للجميع

العلامة			
2		<p>1. دراسة اتجاه تغير الدالة f : $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$ اذن الدالة f متزايدة تماما على $[1; 2]$. بما ان f متزايدة تماما على $[1; 2]$ فان $x \in [1; 2]$ يعني $f(x) \in [f(1); f(2)]$ أي $f(x) \in [1; 2]$. 2. تمثيل الحدود على محور الفواصل:</p>	
2		 <p>من خلال الرسم يتضح لنا ان (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة ولهما نفس النهاية أي متقاربتان نحو L . 3. البرهان بالتراجع: <u>(1) $1 \leq u_n \leq 2$:</u></p>	
1		<p>* $n=0$ نجد $u_0 = 1$ أي $1 \leq u_0 \leq 2$ اذن الخاصية محققة من اجل $n=0$. * نفرض ان $1 \leq u_n \leq 2$ محققة ونبرهن ان $1 \leq u_{n+1} \leq 2$ محققة: الدالة f متزايدة معناه $1 \leq u_n \leq 2$ يعطي لنا $f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$ أي $1 \leq u_{n+1} \leq 2$. • نستنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n ان $1 \leq u_n \leq 2$. <u>(2) $1 \leq v_n \leq 2$:</u></p>	
1		<p>* $n=0$ نجد $v_0 = 2$ أي $1 \leq v_0 \leq 2$ اذن الخاصية محققة من اجل $n=0$. * نفرض ان $1 \leq v_n \leq 2$ محققة ونبرهن ان $1 \leq v_{n+1} \leq 2$ محققة: الدالة f متزايدة معناه $1 \leq v_n \leq 2$ يعطي لنا $f(1) \leq f(v_n) \leq f(2)$ أي $1 \leq v_{n+1} \leq 2$. • نستنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n ان $1 \leq v_{n+1} \leq 2$. <u>(3) $u_n \leq u_{n+1}$:</u></p>	
1		<p>* $n=0$ نجد $u_0 = 1$ و $u_1 = f(u_0) = \frac{3}{2}$ ومنه $u_0 \leq u_1$ اذن الخاصية محققة من اجل $n=0$. * نفرض ان $u_n \leq u_{n+1}$ ونبرهن ان $u_{n+1} \leq u_{n+2}$: الدالة f متزايدة معناه $u_n \leq u_{n+1}$ يعطي لنا $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ أي $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. • نستنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n ان $u_n \leq u_{n+1}$. <u>(4) $v_n \geq v_{n+1}$:</u></p>	
1		<p>* $n=0$ نجد $v_0 = 2$ و $v_1 = f(v_0) = \frac{5}{3}$ ومنه $v_0 \geq v_1$ اذن الخاصية محققة من اجل $n=0$.</p>	

* نرض ان $v_n \geq v_{n+1}$ ونبرهن ان $u_{n+1} \leq u_{n+2}$

الدالة f متزايدة معناه $v_n \geq v_{n+1}$ يعطي لنا $f(v_n) \geq f(v_{n+1})$ أي $v_{n+1} \geq v_{n+2}$.

• نستنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n ان $v_n \geq v_{n+1}$.

(أ) لدينا :

$$2 \quad v_{n+1} - u_{n+1} = f(v_n) - f(u_n) = \frac{2v_n + 1}{v_n + 1} - \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}$$

$$= \frac{(2v_n + 1)(u_n + 1) - (v_n + 1)(2u_n + 1)}{(v_n + 1)(u_n + 1)} = \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)}$$

(ب) استنتاج انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $v_n - u_n \geq 0$ و $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$

* من اجل $n=0$ نجد $v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1 \geq 0$ اذن الخاصية محققة من اجل $n=0$.

* نرض ان $v_n - u_n \geq 0$ ونبرهن ان $v_{n+1} - u_{n+1} \geq 0$

لنا $v_n - u_n \geq 0$ وبما ان الدالة f متزايدة نجد $f(v_n) - f(u_n) \geq 0$ أي $v_{n+1} - u_{n+1} \geq 0$.

* نستنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $v_n - u_n \geq 0$.

ولدينا $1 \leq u_n \leq 2$ و $2 \leq u_n + 1 \leq 3$ و $1 \leq v_n \leq 2$ و $2 \leq v_n + 1 \leq 3$ ومنه (2)...

2 بالجداء (1) في (2) نجد $4 \leq (u_n + 1)(v_n + 1) \leq 9$ ومنه $\frac{1}{9} \leq \frac{1}{(u_n + 1)(v_n + 1)} \leq \frac{1}{4}$ أي

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n) \quad \text{ومنه} \quad \frac{1}{9}(v_n - u_n) \leq \frac{v_n - u_n}{(u_n + 1)(v_n + 1)} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$$

(ج) اثبات انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

وجدنا سابقا ان $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$ ومنه :

$$2 \quad v_1 - u_1 \leq \frac{1}{4}(v_0 - u_0)$$

$$v_2 - u_2 \leq \frac{1}{4}(v_1 - u_1)$$

$$v_3 - u_3 \leq \frac{1}{4}(v_2 - u_2)$$

⋮

$$v_n - u_n \leq \frac{1}{4}(v_{n-1} - u_{n-1})$$

$$. \quad v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{نجد} \quad v_n - u_n \leq \underbrace{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \dots \times \frac{1}{4}}_{n \text{ fois}} (v_0 - u_0)$$

(د) مما سبق وجدنا انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $u_n \leq u_{n+1}$ أي $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ان المتتالية متزايدة

2 وأيضا $v_n \geq v_{n+1}$ أي $v_{n+1} - v_n \leq 0$ أي ان المتتالية (v_n) متناقصة وأيضا لنا $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

ومنه $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$ أي $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ ومنه فانهما متتاليتين متجاورتين أي لهما نفس النهاية L .

2 (هـ) تعيين القيمة المضبوطة للنهاية L : النهاية L تحقق $\frac{2L+1}{L+1} = L$ ومنه نجد المعادلة $L^2 - L - 1 = 0$

$$. \quad L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{وبحل هذه المعادلة وعلمنا انها موجبة لان جميع الحدود موجبة نجد}$$