الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

المفتشية العامة للبيداغوجيا — المقاطعة التفتيشية لولاية عين الدفلى الشرقية
امتحان بكالوريا تجريبي — دورة ماي 2015
الشعبة : رياضيات

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة : 4 ساعات و 30د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : 03 نقاط

a ، b و n أعداد طبيعية بحيث : $a = 3n+2$ و $b = 2n+1$.

1/ أثبت أن a و b أوليان فيما بينهما.

2/ لتكن في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x,y) : $3x-4y=304$..............(1)

أ- عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون (a,b) حلا للمعادلة (1).

ب- استنتج حلا خاصاً للمعادلة (1) .

جـ- بيّن أنّه اذا كان (x,y) حل للمعادلة (1) فإنّ $3(x-908)=4(y-605)$، ثمّ استنتج الأزواج (x,y) حلول المعادلة (1)

3/ عين الزوج الطبيعي (x_0,y_0) الذي يحقق الجملة $\begin{cases}3x_0-4y_0=304\\ ppcm(x_0,y_0)=2333856\end{cases}$

التمرين الثاني : 05 نقاط

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

1/ حل في C المعادلة : $(z^2+1)(z^2-2-2i\sqrt{3})=0$

2/ نعتبر النقط A، B، C ، D لواحقها $z_A=\sqrt{3}+i$; $z_B=\sqrt{3}-i$; $z_C=i$; $z_D=1$

أ/ اكتب كل من z_A, z_B, z_C و $\frac{z_A}{z_B}$ على شكلها الأسي.

ب/ استنتج قيساً للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})$ و طبيعة المثلث OAB.

ج/ عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ تخيلياً صرفاً موجباً.

3/ أ- عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي يحقق $S(A)=A$ و $S(B)=C$ محددا عناصره المميزة.

ب- عين و أنشئ القطعة $[B'C']$ صورة القطعة المستقيمة $[BC]$ بالتشابه S مستنتجا مساحة المثلث $AB'C'$.

4/ عين (E) مجموعة النقط M من المستوي صور العدد المركب z حيث: $z=-1-2i-ke^{i\frac{\pi}{4}}$ مع $k\in\Re$، ثم بين أن D تنتمي إلى (E).

التمرين الثالث : 04 نقاط

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط $A(1;3;4)$ و $B(-1;4;4)$ و $C(3;1;2)$

1/ أ/ أثبت أنّ النقط A ، B و C ليست في استقامية.

ب/ أثبت أنّ الشعاع $\vec{n}(1;2;-1)$ ناظم للمستوي (ABC) ثم عين المعادلة الديكارتية لهذا المستوي.

2/ (P) مستوي تمثيله الوسيطي: $\begin{cases}x=1+2m+t\\ y=1+m\\ z=5+m+t\end{cases}$ $m\in\Re$ ، $t\in\Re$

أ/ أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P)، ثم بين أن (P) و (ABC) متعامدان.

ب/ أكتب تمثيلا وسيطياً للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (ABC).

3/ $D(3,1,1)$ نقطة من الفضاء.

أ/ عين d_1 بعد النقطة D عن المستوي (P) و d_2 بعد النقطة D عن المستوي (ABC).

ب/ استنتج d_3 بعد النقطة D عن المستقيم (Δ).

4/ نعتبر الدائرة (C) المعرفة كما يلي :
$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

أكتب المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S) التي تحوي الدائرة (C) و مركزها Ω ينتمي إلى (P).

التمرين الرابع : 08 نقاط

الجزء الأول :

g دالة عددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\Re$ كما يلي : $g(x) = e^{-x} + x - 1$

1/ أدرس تغيرات الدالة g و احسب $g(0)$.

2/ استنتج اشارة $g(x)$ على $\Re$ وأنه من أجل كل $x \in \Re$ يكون $e^{-x} + x \geq 1$.

الجزء الثاني :

f دالة المعرفة على $\Re$ بـ : $f(x) = \dfrac{x}{x + e^{-x}}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ بين أنه من أجل كل $x \in \Re^*$ $f(x) = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$.

2/ أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجال التعريف، ثم فسر النتائج بيانيا .

3/ بين أنه من أجل كل $x \in \Re$ $f'(x) = \dfrac{x+1}{e^x(x + e^{-x})^2}$ ، ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f مشكلاً جدول تغيراتها.

4/ أ/ عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلته 0.

ب/ بين أنه من أجل كل $x \in \Re$ $f(x) - x = \dfrac{-xg(x)}{x + e^{-x}}$.

جـ/ أدرس اشارة الفرق $f(x) - x$ مستنتجاً الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقي (Δ).

5/ أنشئ (Δ) و (C_f) .

6/ نعتبر الدالة h المعرفة على $\Re$ بـ : $h(x) = f(|x|)$ نرمز بـ (C_h) إلى منحنى الدالة h في نفس المعلم السابق.

أ/ بين أن الدالة h زوجية، ثم بين كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقاً من (C_f) في نفس المعلم.

ب/ m وسيط حقيقي . ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد حلول المعادلة : $h(x) = h(m)$

الجزء الثالث :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad ; n \in N \end{cases}$$

1/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون لدينا $0 \leq u_n \leq 1$.

2/ بين أن المتتالية (u_n) متناقصة .

3/ استنتج تقارب المتتالية (u_n)، ثم حدد نهايتها.

الموضوع الثاني

التمرين الأول : 3,5 نقطة

نعتبر في معلم متعامد متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط $A(1,0,2)\ ;\ B(1,1,4)\ ;\ C(-1,1,1)$

1. بين أن النقط A ، B و C ليست في استقامية.
2. ليكن $\vec{n}=3\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$

- بين أن $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$، ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

3. α عدد حقيقي موجب تماما نعتبر النقطتين I و G بحيث :

I مرجح الجملة $\{(A,1),(B,2)\}$ و G_α مرجح الجملة $\{(A,1),(B,2),(C,\alpha)\}$.

أ. جد إحداثيي النقطة I ثم عبر عن الشعاع $\overrightarrow{IG_\alpha}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{IC}$.

ب. بين أنه عندما يمسح α المجموعة $\mathfrak{R}_+^*$ ، النقطة G_α تمسح القطعة $\overrightarrow{IC}$ بإستثناء النقطتين I و C.

ج. من أجل أي قيمة للوسيط α تنطبق النقطة G_α على منتصف القطعة $[IC]$

التمرين الثاني : 4,5 نقطة

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(0;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب $1-i$, $7+\frac{7}{2}i$

1/ ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $4x+3y=1$

- بين ان مجموعة النقط من (Δ) التي احداثياتها أعداد صحيحة هي مجموعة النقط $M_k\ (3k+1,-4k-1)$ حيث $k\in Z$.

2/ عين نسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه A و يحول النقطة B إلى النقطة M_{-1}

3/ ليكن S تحويل نقطي يحول النقطة M(z) إلى النقطة $M'(z')$ بحيث : $z'=\frac{2}{3}i.z+\frac{1}{3}-\frac{5}{3}i$

- عين صورة النقطة A بالتحويل S ، ثم عين الطبيعة والعناصر المميزة لهذا التحويل.

4/ نضع $B_1=S(B)$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $B_{n+1}=S(B_n)$

أ/ احسب الطول AB_n بدلالة n، ثم عين الأعداد الطبيعية n التي تكون من أجلها النقط A , B_1 , B_n في استقامية.

ب/ إبتداءاً من أي رتبة النقط B_n تكون خارج القرص الذي مركزه A ونصف قطره $\frac{1}{10^2}$ ؟

التمرين الثالث : 05 نقاط

الجزء الأول :

1/ نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;10]$ كما يلي : $f(x)=\frac{8x-6}{x+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $(o,\vec{i},\vec{j})$

- ادرس تغيرات الدالة f ثم أنشئ (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$.

2/ نعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $\begin{cases}u_0=9\\ u_{n+1}=f(u_n)\quad ;n\in N\end{cases}$.

أ/ على الورقة المليمترية وباستعمال المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ)، مثل على محور الفواصل الحدود الربعة الأولى للمتتالية (u_n).

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n)

3/ أ/ برهن بالتراجع أنه : من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}<u_n$ و $6\le u_n$

ب/ استنتج رتابة و تقارب المتتالية (u_n)، ثم احسب $\lim u_n$.

جـ / بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا $(u_{n+1}-6)<\frac{2}{7}(u_n-6)$.

د/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا $(u_n-6)<\left(\frac{2}{7}\right)^n(u_0-6)$.

الجزء الثاني : لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي: $v_n=\frac{u_n-6}{u_n-1}$.

1/ بين أن المتتالية (v_n) هندسية، يطلب أساسها و حدها الأول

2/ أكتب v_n ثم u_n بدلالة n .

3/ بسط العبارة $p_n=ln(v_0\times v_1\times ....\times v_n)$ ، ثم أحسب نهايتها لما يؤول n إلى $+\infty$.

التمرين الرابع : 07 نقاط

الجزء الأول :

f دالة عددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\Re_+^*$ كما يلي : $f(x)=x(ln\,x)^2-2x\,ln\,x+2x-2$

نرمز بـ(C) إلى منحنى الدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$. $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\ cm$

1/ أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب/ بيّن أنّ : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} x(ln\,x)^2=0$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$

جـ/ بين أنه من أجل كل $x\in\Re_+^*$ $f'(x)=(ln\ x)^2$.

د/ أدرس اتجاه تغير الدالة f مشكلاً جدول تغيراتها.

2/ أ/ عيّن معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

ب/ أدرس وضعية (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) ، ثم استنتج أنّ (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيها.

3/ أحسب $f(0,2)$, $f(0,3)$, $f(0,5)$, $f(3)$ ، ثم انشئ المنحنى (C) و المستقيم (Δ).

4/ أثبت أنّ المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلاً وحيداً α حيث : $2,9\prec\alpha\prec3$.

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة h المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $h(x)=ln\,x$

1/ أنشئ (C_h) منحنى الدالة h في معلم آخر.

2/ باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto ln\,x$ على المجال $]0,+\infty[$ هي الدالة $x\mapsto -x+x\,ln\,x$

3/ عين دالة أصلية للدالة $x\mapsto(ln\ x)^2$ على المجال $]0,+\infty[$ و التي تنعدم عند القيمة 1.

4/ أحسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_h) ومحور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x=1$ و $x=e$

5/ أ/ أحسب $V(a)$ حجم المجسم الدوراني الناتج عن دوران المنحنى (C_h) حول محور الفواصل و المحدد على المجال $[1;a]$.

ب/ عين قيمة العدد a التي من أجلها يكون $V(a)=8\pi cm^2$.

تمنياتنا لكم بالتوفيق والنجاح في البكالوريا