التاريخ : 2014/11/26 ثانوية بلحاج قاسم نور الدين السنة الدراسية : 2014- 2015

المستوى :3 ثانوي علوم تجريبية الشلف الفرض الثاني المحروس الثلاثي الأول

فرض في مادة الرياضيات ــ التصحيح اضغط هنا

التمرين الأول : (12 نقطة) - التصحيح

الجزء الأول : لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^x + 2x - e^{-x}$

1) أدرس تغيرات الدالة g.

2) أحسب $g(0)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ في المجموعة $\mathbb{R}$.

الجزء الثاني:

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - \dfrac{2x}{e^x + 1}$

وليكن C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $\dfrac{2x}{e^{-x}+1} = 2x - \dfrac{2x}{e^x+1}$

2) بين أن الدالة f زوجية . ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني C_f.

3) أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

4) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x) = \dfrac{e^x \times g(x)}{(e^x+1)^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

5) أ) بين ان المستقيم Δ ذي المعادلة $y = -x$ مقارب مائل للمنحني C_f عند $-\infty$ و المستقيم Δ' ذي المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني C_f عند $+\infty$

ب) أدرس الوضع النسبي لـ C_f بالنسبة الى Δ ثم بالنسبة الى Δ'.

ج) أرسم المستقيمين Δ ، Δ' و C_f.

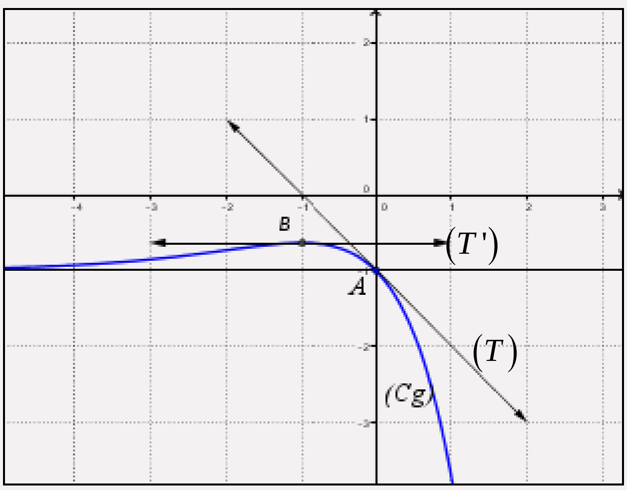
التمرين الثاني: (08 نقاط) - التصحيح

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (ax+b)e^x + c$

حيث a, b, c أعداد حقيقية .

(C_g) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل .

(T) المماس لـ (C_g) عند النقطة $A(0;-1)$ و (T') المماس لـ (C_g) عند النقطة $B(-1;e^{-1}-1)$



1- بقراءة بيانية عين : $g'(-1), g'(0), g(0)$.

2- أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T).

3- شكل جدول تغيرات الدالة g.

4- شكل جدول إشارة الدالة g.

5- باستعمال النتائج السابقة عين الأعداد الحقيقية a, b و c.

بالتوفيق في البكالوريا جوان 2015 ☺ أستاذ المادة

التصحيح - الرجوع الى نص الفرض – اضغط هنا	التنقيط
التمرين الأول : نص التمرين	12 نقطة

الجزء الأول :

لدينا : $g(x)=e^{x}+2x-e^{-x}$ $D_g=]-\infty;+\infty[$

1) دراسة تغيرات الدالة g :

ب) حساب النهايات :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x}+2x-e^{-x}\right)=-\infty$ لأنّ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(2x)=-\infty\end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}+2x-e^{-x}\right)=+\infty$ لأنّ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(2x)=+\infty\end{cases}$

التنقيط : $0.5+0.5$

ج) حساب المشتقة :

- لدينا : $g'(x)=e^{x}+2-\left(-e^{-x}\right)=e^{x}+2+e^{-x}$ أي $g'(x)=e^{x}+2+e^{-x}$

التنقيط : 0.75

- **دراسة إشارة المشتقة :**

لدينا : $g'(x)=0$ يعني $e^{x}+2+e^{-x}=0$

أي $e^{x}+e^{-x}=-2$ (مستحيلة)   لأنّ $e^{x}>0$ و $e^{-x}>0$

- جدول إشارة المشتقة :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$

التنقيط : 0.75

ج) جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

التنقيط : 0.75

2) حساب $g(0)$ واستنتاج إشارة $g(x)$:

- لدينا : $g(0)=e^{0}+2(0)-e^{0}=1-1=0$
- استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

التنقيط : $0.25+0.5$

الجزء الثاني :

- لدينا : $f(x)=x-\dfrac{2x}{e^{x}+1}$ $D_f=]-\infty;+\infty[$

1) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\dfrac{2x}{e^{-x}+1}=2x-\dfrac{2x}{e^{x}+1}$

01	• لدينا : $\frac{2x+2xe^{x}-2x}{e^{x}+1}=\frac{2xe^{x}}{1+e^{x}}=\frac{2x}{e^{-x}\left(1+\frac{1}{e^{-x}}\right)}=\frac{2x}{e^{-x}+1}$ ومنه $2x-\frac{2x}{e^{x}+1}=\frac{2x\left(1+e^{x}\right)-2x}{e^{x}+1}=\frac{2x}{e^{-x}+1}$ إذن $\frac{2x}{e^{-x}+1}=2x-\frac{2x}{e^{x}+1}$
01	**2) تبيان أنَّ الدالة f زوجية :** • D_f متناظرة بالنسبة إلى 0 أي من أجل $x\in\mathbb{R}$ فإنَّ $(-x)\in\mathbb{R}$ • ولدينا : $f(-x)=-x-\frac{-2x}{e^{-x}+1}=-x+\frac{2x}{e^{-x}+1}=-x+2x-\frac{2x}{e^{x}+1}=x-\frac{2x}{e^{x}+1}$ وبالتالي $f(-x)==x-\frac{2x}{e^{x}+1}=f(x)$ ومنه f دالة زوجية • نستنتج أنَّ حامل محور التراتيب محور تناظر للمنحني (C_f)
0.5+0.5	**3) حساب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:** • $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\frac{2x}{e^{x}+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(1-\frac{2}{e^{x}+1}\right)=+\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{2x}{e^{x}+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x}{e^{x}}\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\right)=+\infty$ لأنَّ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)=2\end{cases}$
01	**4) تبيان أنَّه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\frac{e^{x}\times g(x)}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$:** لدينا : $f'(x)=1-\frac{2\left(e^{x}+1\right)-2xe^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}=\frac{\left(e^{x}+1\right)^{2}-2e^{x}-2+2xe^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$ أي $f'(x)=\frac{e^{2x}+2e^{x}+1-2e^{x}-2+2xe^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}=\frac{e^{2x}-1+2xe^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}=\frac{e^{x}\left(e^{x}-\frac{1}{e^{x}}+2x\right)}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$ ومنه $f'(x)=\frac{e^{x}\left(e^{x}-\frac{1}{e^{x}}+2x\right)}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}=\frac{e^{x}\left(e^{x}+2x-e^{-x}\right)}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}=\frac{e^{x}\times g(x)}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$ إذن $f'(x)=\frac{e^{x}\times g(x)}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$
0.5	• **استنتاج اتجاه تغير الدالة f :** - جدول إشارة المشتقة : إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & \end{array}$

- **جدول تغيرات الدالة** f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

0.5

5) أ) تبيان أنَ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=-x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$:

- لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{2x}{e^x+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x\left(e^x+1\right)-2x}{e^x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2xe^x+2x-2x}{e^x+1}$$

ومنه $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x)\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2xe^x}{e^x+1}=0$ لأنَ $\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}2xe^x=0\\ \lim_{x\to-\infty}\left(e^x+1\right)=1\end{cases}$

ومنه المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=-x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$.

0.5

- **تبيان أنَ المستقيم (Δ') ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$:**

- لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{2x}{e^x+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\times\frac{-2}{1+\frac{1}{e^x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\times\frac{-2}{1+e^{-x}}=0$$

لأنَ $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{1+e^{-x}}=-2\\ \lim_{x\to+\infty}\left(1+e^{-x}\right)=1\end{cases}$ ومنه (Δ') ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني (C_f)

عند $+\infty$

0.5

ب)دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

- ندرس إشارة الفرق $f(x)-(-x)=f(x)+x=\frac{2xe^x}{e^x+1}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)+x$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	

0.5

- **دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ') :**

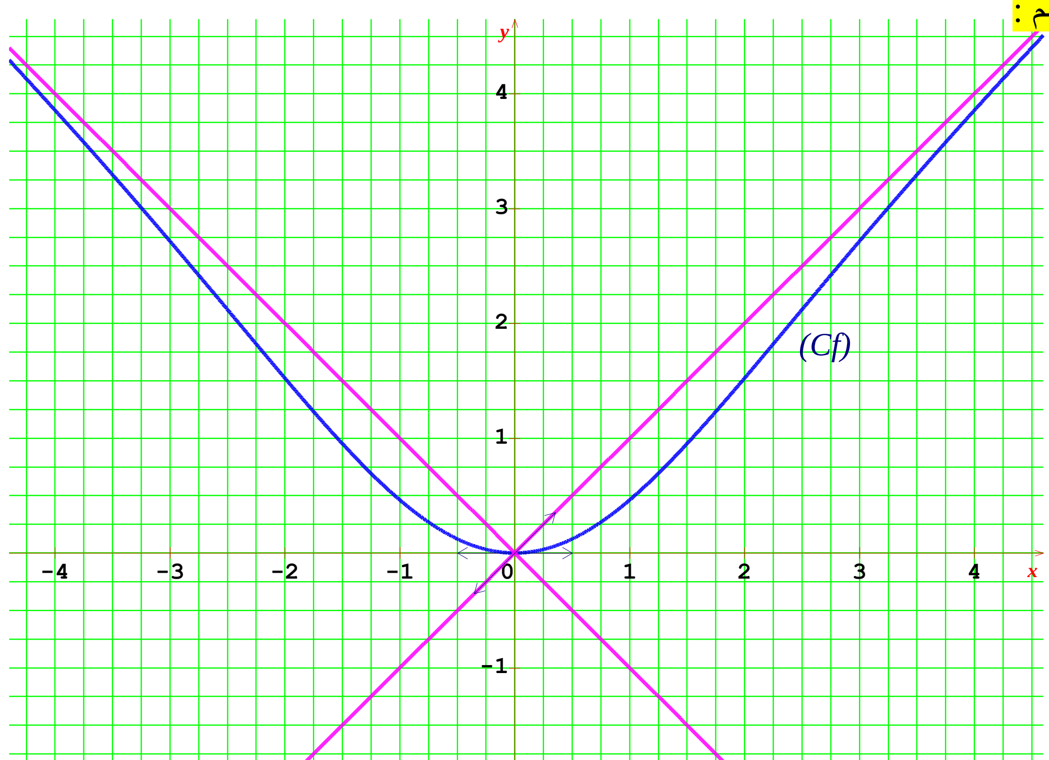
0.5

- ندرس إشارة الفرق $f(x)-x=-\dfrac{2x}{e^x+1}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-x$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ')	(C_f) يقطع (Δ')	(C_f) تحت (Δ')

ج) الرسم :

01



التمرين الثاني : الرجوع الى النص — **08 نقاط**

لدينا : $g(x)=(ax+b)e^x+c$

1) تعيين $g'(-1), g'(0), g(0)$:

02.5

- $g(0)=-1$
- $g'(0)=\dfrac{-1-0}{0-(-1)}=-1$
- $g'(-1)=0$

2) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) :

01

$y=g'(0)(x-0)+g(0)=-x-1$ $\quad$ $(T): y=-x-1$

3) جدول تغيرات الدالة g :

01.5

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	-1 ↗	$e^{-1}-1$	↘ $-\infty$

<table>
<tr>
<td>

4) جدول إشارة الدالة g :

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$g(x)$</td><td>$-$</td></tr>
</table>

</td>
<td>0.5</td>
</tr>
<tr>
<td>

5) تعيين الأعداد الحقيقية b,a و c :

- لدينا : $g(0)=-1$ يعني $(a\times 0+b)e^0+c=0$
  ومنه $b+c=-1$ ...(1)
- ولدينا : $g'(x)=ae^x+(ax+b)e^x=(ax+a+b)e^x$
  $g'(-1)=0$ يعني $(a\times(-1)+a+b)e^{-1}=0$
  أي $(-a+a+b)e^{-1}=0$ ومنه $be^{-1}=0$ وبالتالي $b=0$
- من أجل $b=0$ بالتعويض في (1) نجد : $c=-1$
- ولدينا كذلك : $g'(0)=-1$ أي $(a\times 0+a+b)e^0=-1$
  ومنه $(a+0)\times 1=-1$ وبالتالي $a=-1$

إذن $g(x)=-xe^x-1$

</td>
<td>02.5</td>
</tr>
</table>

✌ مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح في البكالوريا جوان 2015 ☺ أستاذ المادة