

التمرين الأول:

f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعبارة: $f(x) = 2e^x + 2x - 7$ و (C_f) المنحنى البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j})$

- 1 | أدرس نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$
- 2 | أدرس اتجاه تغير الدالة f على \mathbb{R} ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- 3 | بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في \mathbb{R} حلا وحيداً α حيث: $0,94 \leq \alpha \leq 0,941$
- 4 | استنتج إشارة f على \mathbb{R} ثم أرسم (C_f)

التمرين الثاني:

لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} ب: $f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$

نعتبر المعادلة التفاضلية (E) حيث: $y' + 2y = 3e^{-3x}$

(1) حل المعادلة التفاضلية (E') حيث: $y' + 2y = 0$

(2) استنتج أن الدالة h المعرفة على \mathbb{R} ب: $h(x) = \frac{9}{2}e^{-2x}$ هي حل للمعادلة (E')

(3) تحقق أن الدالة g المعرفة على \mathbb{R} ب: $g(x) = -3e^{-3x}$ هي حل للمعادلة (E)

(4) بين أن الدالة f هي حل للمعادلة (E)

بالتوفيق

انتهى

الصفحة 1|1

مادة الرياضيات | ثانوية الإخوة بلغالي

المستوى: 3 ع تج
المادة: رياضياتثانوية: الاخوة بلغالي-اولاد عباس-
السنة الدراسية: 2016-2017

المدة: 60 دقيقة

فرض محروس رقم 2 للفصل الثاني

التمرين الأول:

f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعبارة: $f(x) = 2e^x + 2x - 7$ و (C_f) المنحنى البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j})$

- 1 | أدرس نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$
- 2 | أدرس اتجاه تغير الدالة f على \mathbb{R} ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- 3 | بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في \mathbb{R} حلا وحيداً α حيث: $0,94 \leq \alpha \leq 0,941$
- 4 | استنتج إشارة f على \mathbb{R} ثم أرسم (C_f)

التمرين الثاني:

لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} ب: $f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$

نعتبر المعادلة التفاضلية (E) حيث: $y' + 2y = 3e^{-3x}$

(1) حل المعادلة التفاضلية (E') حيث: $y' + 2y = 0$

(2) استنتج أن الدالة h المعرفة على \mathbb{R} ب: $h(x) = \frac{9}{2}e^{-2x}$ هي حل للمعادلة (E')

(3) تحقق أن الدالة g المعرفة على \mathbb{R} ب: $g(x) = -3e^{-3x}$ هي حل للمعادلة (E)

(4) بين أن الدالة f هي حل للمعادلة (E)

بالتوفيق

$f(x) = 2e^x + 2x - 7$ بالعبارة: f دالة معرفة على \mathbb{R}

1 | دراسة نهايتي الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

1 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 7 = -\infty$

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 7) = +\infty$

2 | دراسة اتجاه تغير الدالة f على \mathbb{R} :

1 الدالة f مستمرة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} حيث: $f'(x) = 2e^x + 2 = 2(e^x + 1)$

1 بما أن $e^x > 0$ فإن $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على \mathbb{R}

جدول التغيرات:

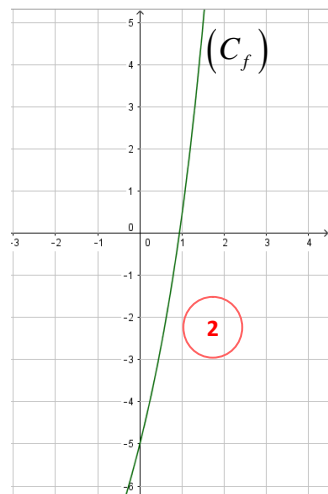
x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2 | 3 | إثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في \mathbb{R} حلا وحيداً α حيث: $0,94 \leq \alpha \leq 0,941$

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على \mathbb{R} إذن هي مستمرة ومتزايدة على المجال $[0,94; 0,941]$

ومن جهة أخرى لدينا: $f(0,94) = -0,000037...$ و $f(0,941) = 0,07085...$

يستلزم $f(0,94) \times f(0,941) < 0$. وحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا



وحيداً α حيث: $0,94 \leq \alpha \leq 0,941$

2 | 4 | استنتاج إشارة f على \mathbb{R} :

بما أن الدالة f متزايدة تماما على \mathbb{R} و $f(\alpha) = 0$ نستنتج ما يلي:

إذا كان $x = \alpha$ فإن $f(x) = 0$

إذا كان $x < \alpha$ فإن $f(x) < 0$

إذا كان $x > \alpha$ فإن $f(x) > 0$

التمرين الأول (10 نقاط):

لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$

و نعتبر المعادلة التفاضلية (E) حيث: $y' + 2y = 3e^{-3x}$

2 | 1 | حل المعادلة التفاضلية (E') حيث: $y' + 2y = 0$

(E') تكافئ $y' = -2y$ ولدينا $a = -2$ ومنه حلول المعادلة (E') على \mathbb{R} هي الدوال $C \cdot e^{-2x}$

مع C عدد حقيقي ثابت

2 | 2 | الاستنتاج:

من أجل $C = \frac{9}{2}$ نجد أن الدالة h المعرفة على \mathbb{R} بـ: $h(x) = \frac{9}{2}e^{-2x}$ هي حل للمعادلة (E') الخاص

3 | 3 | التحقق أن الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = -3e^{-3x}$ هي حل المعادلة (E)

الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} حيث $g'(x) = 9e^{-3x}$ ومن أجل كل x من \mathbb{R} لدينا:

$$g'(x) + 2g(x) = 9e^{-3x} - 6e^{-3x} = 3e^{-3x}$$

ومنه g حل للمعادلة (E) على \mathbb{R}

3 | 4 | إثبات أن الدالة f هي حل المعادلة (E) :

لدينا: $f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$ أي $f = h + g$ ومن أجل $x \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$f'(x) + 2f(x) = h'(x) + g'(x) + 2[h(x) + g(x)]$$

$$= [h'(x) + 2h(x)] + [g'(x) + 2g(x)]$$

بما أن $h'(x) + 2h(x) = 0$ و $g'(x) + 2g(x) = 3e^{-3x}$ فإن $f'(x) + 2f(x) = 3e^{-3x}$

وعليه f حل للمعادلة (E) على \mathbb{R}

الجزء الأول: g دالة معرفة على \mathbb{R} بالعلاقة: $g(x) = 2e^x + 2x - 7$

1 | دراسة نهائي الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 7 = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 7) = +\infty$

2 | دراسة اتجاه تغير الدالة g على \mathbb{R} :

الدالة g مستمرة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} حيث: $g'(x) = 2e^x + 2 = 2(e^x + 1)$

بما أن $e^x > 0$ فإن $g'(x) > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على \mathbb{R}

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3 | إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في \mathbb{R} حلا وحيداً α حيث: $0,94 \leq \alpha \leq 0,941$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على \mathbb{R} إذن هي مستمرة ومتزايدة على المجال $[0,94; 0,941]$

ومن جهة أخرى لدينا: $g(0,94) = -0,000037...$ و $g(0,941) = 0,07085...$

يستلزم $g(0,94) \times g(0,941) < 0$. وحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيداً α

حيث: $0,94 \leq \alpha \leq 0,941$

4 | استنتاج إشارة g على \mathbb{R} :

بما أن الدالة g متزايدة تماما على \mathbb{R} و $g(\alpha) = 0$ نستنتج ما يلي:

إذا كان $x = \alpha$ فإن $g(x) = 0$

إذا كان $x < \alpha$ فإن $g(x) < 0$

إذا كان $x > \alpha$ فإن $g(x) > 0$

الجزء الثاني:

f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$

1 | دراسة إشارة f على \mathbb{R} :

لدينا: $f(x) = 0$ يكافئ $2x - 5 = 0$ أو $1 - e^{-x} = 0$

معناه $x = 0$ أو $x = \frac{5}{2}$

ومنه إشارة $f(x)$ ملخصة في الجدول المقابل:

x	$-\infty$	0	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$2x - 5$	-	0	+	+
$1 - e^{-x}$	+	+	0	-

2 | دراسة نهائي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 5) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^{-x}) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 5) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) = 1$

3 | أ- حساب $f'(x)$ ، ثم التحقق أن $f'(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الإشارة.

$f'(x) = 2(1 - e^{-x}) + (2x - 5)e^{-x}$

لدينا: $f'(x) = 2 - 2e^{-x} + 2xe^{-x} - 5e^{-x} = 2 - 7e^{-x} + 2xe^{-x} = e^{-x}(2e^x + 2x - 7)$

ومنه: $f'(x) = g(x) \cdot e^{-x}$ وبما أن $e^{-x} > 0$ فإن $f'(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الإشارة.

ب- جدول تغيرات الدالة f :

من السؤال السابق نستنتج أن:

إذا كان $x = \alpha$ فإن $f'(x) = 0$

إذا كان $x < \alpha$ فإن $f'(x) < 0$

إذا كان $x > \alpha$ فإن $f'(x) > 0$

4 | أ/ إثبات أن: $f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$

لدينا: $f(\alpha) = (2\alpha - 5)(1 - e^{-\alpha})$ يكافئ (1) $f(\alpha) = (2\alpha - 5) \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha} = (2\alpha - 5) \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha}$

وكذلك: $g(\alpha) = 0$ يكافئ $2e^\alpha + 2\alpha - 7 = 0$ ومنه (2) $e^\alpha = \frac{7 - 2\alpha}{2}$

بتعويض (2) في (1) نجد: $f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 5) \left(\frac{7 - 2\alpha}{2} - 1 \right)}{\frac{7 - 2\alpha}{2}} = \frac{(2\alpha - 5)(5 - 2\alpha)}{7 - 2\alpha}$

ومنه: $f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$ أي $f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 5)(2\alpha - 5)}{2\alpha - 7}$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة $h: x \rightarrow \frac{(2x - 5)^2}{2x - 7}$ على المجال $]-\infty, \frac{5}{2}[$

الدالة h معرفة وقابلة للاشتقاق على $]-\infty, \frac{5}{2}[$ حيث:

$h'(x) = \frac{4(2x - 5)(2x - 7) - 2(2x - 5)^2}{(2x - 7)^2} = \frac{2(2x - 5)(4x - 14 - 2x + 5)}{(2x - 7)^2}$
 $= \frac{2(2x - 5)(2x - 9)}{(2x - 7)^2}$

0.25

0.25

0.5

0.5

0.5

0.5

0.5

0.25

0.25

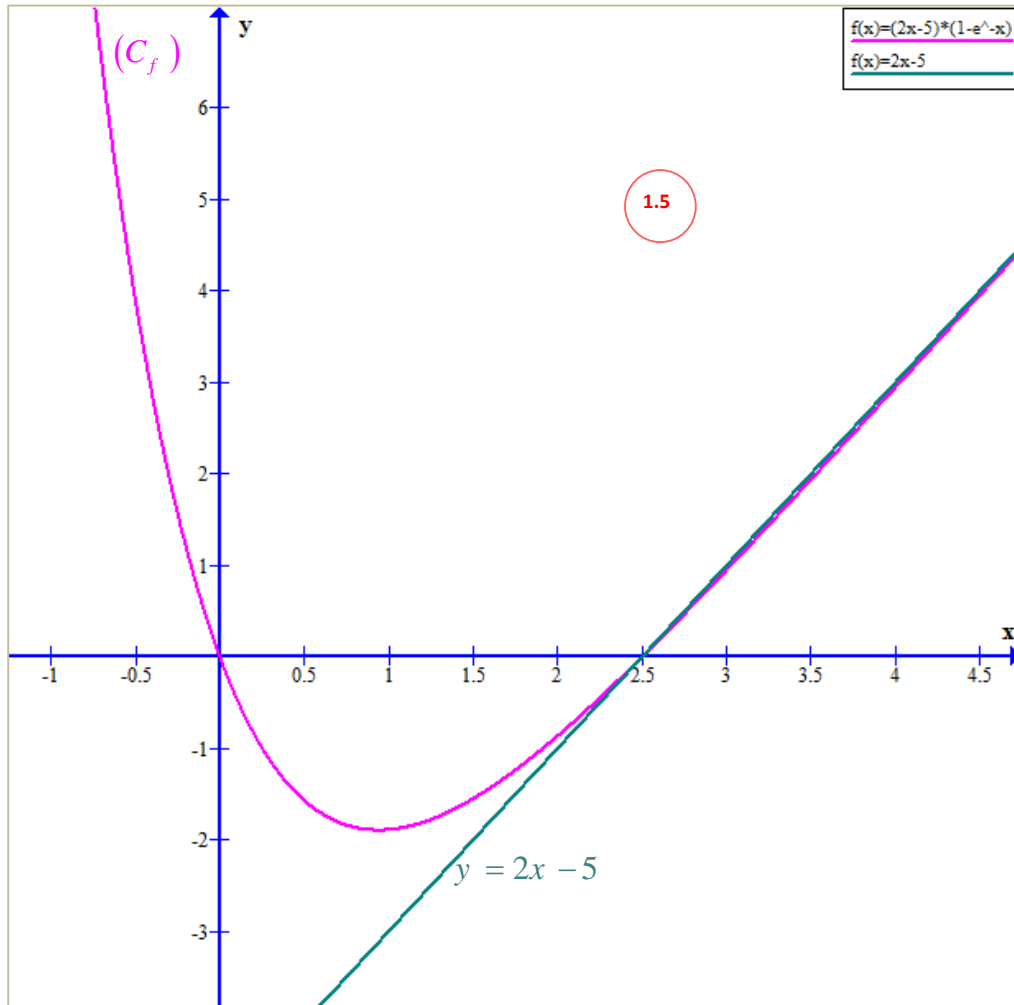
0.5

0.5

0.5

0.5

0.5



0.5

0.5

0.5

0.5

0.5

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$-2x + 5$	+	0	-
$f(x) - y$	+	0	-
الوضعية	(D) فوق (C_f)		(D) تحت (C_f)

0.5

$\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ — (C_f) يقطع (Δ)