

بتاريخ: 2017/10/17

المدة: ساعة

ثانوية: زريمش عيسى (حمام دباغ)

المستوى: 3عج + 3تر + 3

فرض الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

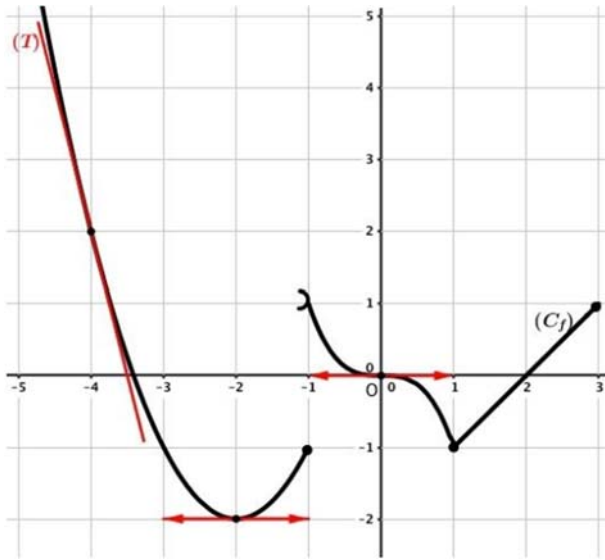
التمرين الأول: (06 نقاط)

اجب بصحيح أو خاطئ مع التبرير

1  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$  ، 2  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2} = +\infty$  ، 3 القيمة التقريبية للعدد  $(0.98)^2$  هي 0.96

4 حلول المعادلة التفاضلية  $y' = \frac{1}{x^2}$  في  $]0; +\infty[$  هي الدوال  $y$  حيث:  $y = \frac{1}{x} + c$  مع  $c$  ثابت حقيقي.

التمرين الثاني: (06 نقاط)



$f$  دالة عددية معرفة على المجال  $]-\infty; 3]$  بتمثيلها البياني  $(C_f)$  في الشكل المقابل،  $(T)$  مماس لـ  $(C_f)$  في النقطة التي فاصلتها  $(-4)$  (1) بقراءة بيانية:

أ\* عين:  $f(-2)$  ،  $f'(-2)$  ،  $f(-4)$  ،  $f'(-4)$  .

ب\*  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  ،  $\lim_{x \rightarrow -1} f'(x)$  ماذا تستنتج؟

ج\*  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x}$  ،  $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{\tan x}{x}\right)$  ،  $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right)$

(2) بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حل وحيد  $\alpha$  في  $[-4; -3]$

(3) أكتب معادلة المماس  $(T)$  .

(4) شكل جدول تغيرات الدالة  $g$  المعرفة على  $]-\infty; -2]$  بـ:  $g(x) = f(x+1)$

التمرين الثالث: (08 نقاط)

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)\sqrt{x^2-1} ; x \in [1; +\infty[ \\ f(x) = -x + \frac{3}{2} - \frac{x}{x^2+1} ; x \in ]-\infty; 1[ \end{cases}$$

نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:

(1) أوجد الأعداد الحقيقية  $a; b; c$  حيث:  $x \in ]-\infty; 1[$  و  $f(x) = \frac{(x-1)(ax^2+bx+c)}{2(x^2+1)}$

(2) أ\* بين أن الدالة  $f$  مستمرة عند 1.

ب\* أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ،  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  . ثم أحسب كل من:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$  ،  $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$  ماذا تستنتج؟ فسر النتيجة بيانياً.

(3) أ\* لتكن  $f'$  الدالة المشتقة للدالة  $f$ . بين أن:  $f'(x) = \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{x^2-1}} ; x \in [1; +\infty[$  ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  ،  $f'(x) = -\frac{x^4+x^2+2}{(x^2+1)^2} ; x \in ]-\infty; 1[$

ب\* بين أن  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب مائل  $(\Delta)$  بجوار  $-\infty$  يطلب تعيين معادلته ثم ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة لـ  $(\Delta)$

(4) بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطتي انعطاف في المجال  $]-\infty; 1[$  يطلب تعيين إحداثيتهما. (5) ارسم  $(\Delta)$  و  $(C_f)$ .

**3 كتابة معادلة المماس (T):**

$(T): y = -4x - 14$  ومنه  $(T): y = f'(-4)(x+4) + f(-4)$

**4 تشكيل جدول تغيرات الدالة g المعرفة على  $]-\infty; -2]$**

بـ:  $g'(x) = f'(x+1)$  ،  $g(x) = f(x+1)$

x	$-\infty$	-3	-2
g(x)	-	0	+
g'(x)	$+\infty$		-1

**التمرين الثالث: (08 نقاط)**

**1 إيجاد الأعداد الحقيقية  $a; b; c$  حيث  $x \in ]-\infty; 1[$  و**

لدينا  $f(x) = \frac{(x-1)(ax^2+bx+c)}{2(x^2+1)}$

$f(x) = -x + \frac{3}{2} - \frac{x}{x^2+1} = \frac{-2x^3+3x^2-4x+3}{2(x^2+1)}$

باستعمال طريقة هورنر نجد:

ومنه  $c = -3; b = 1; a = -2$

$f(x) = \frac{(x-1)(-2x^2+x-3)}{2(x^2+1)}$

**2 أ\* نبين أن الدالة f مستمرة عند 1:**

لدينا:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)\sqrt{x^2-1} = 0$  ،  $f(1) = 0$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(-x + \frac{3}{2} - \frac{x}{x^2+1}\right) = 0$

فإن  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$  مستمرة عند 1.

**ب\* حساب مايلي:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)\sqrt{x^2-1} = +\infty$**

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + \frac{3}{2} - \frac{x}{x^2+1}\right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{x^2-1}}{x-1} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(-2x^2+x-3)}{(x-1)2(x^2+1)} = -1$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} \neq \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$  فإن الدالة f غير قابلة

للاشتقاق عند 1.

التفسير البياني: A(1;0) هي نقطة زاوية للمنحنى  $(C_f)$

2018/2017

ثانوية: زريمش عيسى

**تصحيح الفرض الأول للثلاثي الأول--3 عتج +3 تر+ 3 ر**

**التمرين الأول: (06 نقاط)**

سؤال 1	سؤال 2	سؤال 3	سؤال 4
صحيح	خاطئ	صحيح	خاطئ

**التبرير: (1)**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{(1+\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{(1+\cos x)} = \frac{1}{2}$

**2 لدينا:  $1+2+3+\dots+n = \frac{n}{2}(1+n)$  مجموع حدود متتالية**

حسابية حدها الأول 1 وأساسها 1 وحدها الأخير n

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}$

**3 بوضع:  $f(x) = x^2$  ،  $f(1-0.02) = (0.98)^2$  لدينا**

$h = -0.02; x_0 = 1$  ،  $f(x_0+h) \approx hf'(x_0) + f(x_0)$   
بما أن  $f(1-0.02) \approx 0.02f'(1) + f(1)$  فإن  $(0.98)^2 \approx 0.96$

**4 حلول المعادلة التفاضلية  $y' = \frac{1}{x^2}$  في  $]0; +\infty[$  هي**

الدوال y حيث:  $y = -\frac{1}{x} + c$  مع c ثابت حقيقي.

**التمرين الثاني: (06 نقاط)**

**1 بقراءة بيانية: أ\* تعيين:**

$f'(-4) = -4$  ،  $f(-2) = -2$  ،  $f(-4) = 2$  ،  $f'(-2) = 0$

ب\*  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$  ،  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$  ، بما أن

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  فإن الدالة غير مستمرة عند -1

ج\*  $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{\tan x}{x}\right) = -1$  ،  $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)-0}{x-0} = f''(0) = 0$

**2 نبين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حل وحيد  $\alpha$  في  $[-4; -3]$**

لدينا: الدالة f معرفة ومستمرة ورتيبة تماما على  $[-4; -3]$  و

$f(-4) = 2$  ،  $f(-1) = -1$  لأن  $f(-4)f(-3) < 0$  م. القيم

المتوسطة المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حل وحيد  $\alpha$  في  $[-4; -3]$

ندرس إشارة الفرق:  $\left[ f(x) - \left(-x + \frac{3}{2}\right) \right] = -\frac{x}{x^2+1}$

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	
$-x$		+	0	-
$x^2+1$		+	0	+
$\frac{-x}{x^2+1}$		+	0	-
وضعية $(C_f)$ بالنسبة لـ $(\Delta)$	فوق $(C_f)$ $(\Delta)$		تحت $(C_f)$ $(\Delta)$	
	$(C_f) \cap (\Delta) = \left\{ A' \left( 0; \frac{3}{2} \right) \right\}$			

**4** نبين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطتي انعطاف في المجال

$]-\infty; 1[$  يطلب تعيين إحداثيتهما:

لدينا:  $f'(x) = -\frac{x^4+x^2+2}{(x^2+1)^2}; x \in ]-\infty; 1[$

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق مرتين على المجال  $]-\infty; 1[$ :

$$f''(x) = \frac{-2x^3+6x}{(x^2+1)^3} = -\frac{2x(x^2-3)}{x^6+3x^4+3x^2+1}$$

إشارة  $f''(x)$  على  $]-\infty; 1[$ :

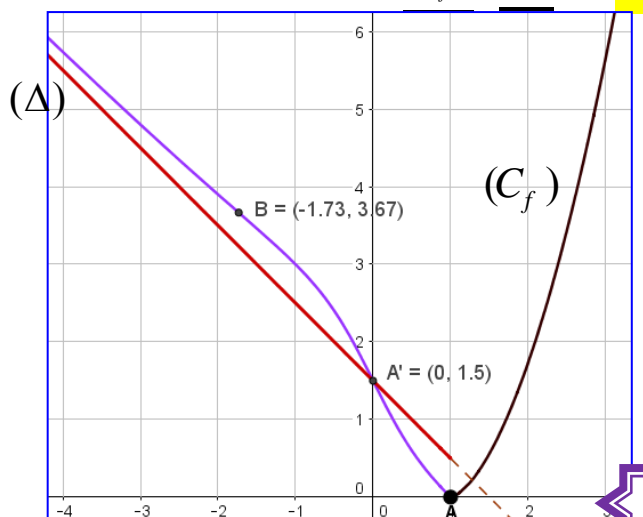
$x$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$0$	$1$
$-2x$	+	+	0	-
$x^2-3$	+	0	-	-
$(x^2+1)^3$	+	+	+	+
$f''(x)$	+	0	-	+

$f''(x)$  انعدمت مغيرة إشارتها عند  $0$  و  $-\sqrt{3}$  ومنه:

المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطتي انعطاف في المجال  $]-\infty; 1[$  هما

$$\frac{5}{4}\sqrt{3} + \frac{3}{2} = 3.67, B \left( -\sqrt{3}; \frac{5}{4}\sqrt{3} + \frac{3}{2} \right) \text{ و } A' \left( 0; \frac{3}{2} \right)$$

**5** رسم  $(\Delta)$  و  $(C_f)$ :



**3** أ/ نبين أن:

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{x^2-1}}; x \in ]1; +\infty[ \\ f'(x) = -\frac{x^4+x^2+2}{(x^2+1)^2}; x \in ]-\infty; 1[ \end{cases}$$

\*الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]1; +\infty[$  دالتها المشتقة  $f'$ :

$$f'(x) = \sqrt{x^2-1} + \frac{2x(x-1)}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

\*الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]-\infty; 1[$  دالتها المشتقة  $f'$ :

$$f'(x) = -1 - \frac{(x^2+1)-2x \cdot x}{(x^2+1)^2} = -\frac{x^4+x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{x^2-1}}; x \in ]1; +\infty[ \\ f'(x) = -\frac{x^4+x^2+2}{(x^2+1)^2}; x \in ]-\infty; 1[ \end{cases}$$

ومنه:

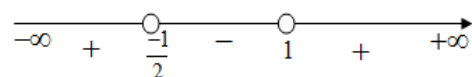
**\*\* تشكيل جدول تغيرات الدالة  $f$ :**

**\*\* إشارة  $f'(x)$  في المجال  $]1; +\infty[$ :**

إشارة  $f'(x)$  تتعلق بإشارة البسط لان المقام موجب

$$2x^2-x-1=0 \text{ يكافئ } \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{x^2-1}}=0 \text{ يكافئ } f'(x)=0$$

حساب  $\Delta$ :  $\Delta = 9$  ،  $x_1 = 1$  أو  $x_2 = -\frac{1}{2}$  مرفوضين



بما أن  $f'(x) > 0$  فإن الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $]1; +\infty[$

إشارة  $f'(x)$  على المجال  $]-\infty; 1[$ : لدينا  $-\frac{x^4+x^2+2}{(x^2+1)^2} < 0$

بما أن  $f'(x) < 0$  فإن الدالة  $f$  متناقصة تماما على  $]-\infty; 1[$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ $0$ $\nearrow$	$+\infty$

**ب/ نبين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب مائل  $(\Delta)$**

بحوار  $-\infty$  يطلب تعيين معادلته: من أجل كل  $x \in ]-\infty; 1[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ f(x) - \left(-x + \frac{3}{2}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{x}{x^2+1} \right) = 0$$

م. مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $-\infty$   $(\Delta): y = -x + \frac{3}{2}$

**\*\* دراسة وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة لـ  $(\Delta)$ :**